А.И. Кибзун, Е.Р. Горяинова,
А.В. Наумов, А.Н. Сиротин

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

БАЗОВЫЙ КУРС

С ПРИМЕРАМИ И ЗАДАЧАМИ

Под редакцией А.И. Кибзуна

Рекомендовано Учебно-методическим объединением высших учебных заведений Российской Федерации по образованию в области авиации, ракетостроения и космоса в качестве учебного пособия для студентов высших технических учебных заведений

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ
2002

УДК 519.2
К 38
ББК 22.17

Кибзун А. И., Горяинова Е. Р., Наумов А. В., Сиротин А. Н.
Теория вероятностей и математическая статистика. Базовый курс с примерами и задачами / Учебн. пособие. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. — 224 с. — ISBN 5-9221-0231-1.

Книга предназначена для начального ознакомления с основами теории вероятностей и математической статистики и развития навыков решения практических задач.

Основное внимание уделяется краткости изложения полного курса «Теории вероятностей и математической статистики», состоящего из теоретического и практического материала. Структура изложения максимально приближена к лекционным и практическим занятиям. Пособие может одновременно играть роль учебника, задачника и справочника.

Для преподавателей ВУЗов, инженеров и студентов технических и экономических специальностей.

Ил. 38. Библиогр. 31 назв.

Рецензенты:
кафедра математического моделирования Московского государственного технического университета имени Н.Э. Баумана
(зав. кафедрой, д.ф.–м.н. профессор А.П. Крищенко);
д.ф.–м.н. профессор А.И. Матасов

ISBN 5-9221-0231-1

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

В 1973 году на факультете прикладной математики Московского государственного авиационного института (технического университета) академиком В.С. Пугачевым была создана кафедра теории вероятностей и математической статистики. За прошедшее время на кафедре под научно-методическим руководством В.С. Пугачева были созданы и прочитаны оригинальные учебные курсы по таким дисциплинам, как «Теория вероятностей и математическая статистика», «Случайные процессы», «Математический анализ» и др. На суд читателя выносится серия учебных пособий по трем названным дисциплинам, которые отражают накопленный опыт преподавания этих дисциплин студентам технического университета МАИ, специализирующимся в области прикладной математики, радиоэлектроники, машиностроения и систем управления. Отличительной чертой данных пособий является максимально лаконичное изложение материала при достаточно полном описании современного состояния изучаемых предметов. Кроме того, значительную часть пособий занимают многочисленные примеры и задачи с решениями, что позволяет использовать эти пособия не только для чтения лекционных курсов, но и для проведения практических и лабораторных занятий. Структура изложения курсов такова, что эти пособия могут одновременно играть роль учебника, задачника и справочника. Поэтому пособия могут быть полезны как преподавателям и студентам, так и инженерам.

Проф., д.ф.-м.н. А.И. Кибзун

ПРЕДИСЛОВИЕ

Вниманию читателей предлагается учебное пособие по курсу «Теория вероятностей и математическая статистика» (ТВ и МС), который читался в течение многих лет на различных факультетах Московского государственного авиационного института (МАИ) с использованием учебных программ, соответствующих большинству стандартов для технических и экономических специальностей. Характерной особенностью данного пособия является его многоцелевое назначение. При его написании была сделана попытка выполнить следующие требования:

1) лаконичность изложения, свойственную конспекту лекций;

2) детальное доказательство всех утверждений, характерное для учебников;

3) наличие типовых задач с решениями, а также задач для самостоятельного решения, что отличает задачники;

4) систематизированный и автономно замкнутый материал, присущий справочникам;

5) наличие формализованных ссылок на установленные ранее свойства и введенные понятия, что характерно для компьютерных учебников.

Насколько эта попытка удалась авторам — судить читателю.

Несколько слов более подробно об этих отличительных чертах. Весь курс разделен на 18 тем (параграфов), которые соответствуют примерно 18 лекциям и 18 практическим занятиям продолжительностью по два академических часа. Это соответствует объему стандартного курса ТВ и МС для технических и экономических специальностей. Кроме того, книга содержит дополнительный раздел, посвященный приложениям математической статистики, которые являются актуальными при решении практических задач. Весь материал удалось разместить на 14 печатных листах (п. л.). Заметим, что объем известных учебников и задачников по ТВ и МС достигает 20 п. л. и более. Так как эти учебники содержат информацию, выходящую за рамки стандартной учебной программы, то студентам, как правило, трудно самостоятельно найти интересующий их материал или разобраться в нем. По мнению авторов, в лаконично изложенном пособии, имеющем четкую иерархическую структуру, студентам значительно проще ориентироваться. Кроме того, если курс читается по данному пособию, то студентам не требуется записывать «живые» лекции, и на лекциях остается лишь прояснить непонятые вопросы. Большинство учебников по ТВ и МС отличается от предлагаемого еще и тем, что начинающему преподавателю, даже с хорошей математической подготовкой, очень сложно прочитать по ним реальный курс лекций. Это связано с тем, что в учебниках нет дробления материала на последовательные лекции и семинарские занятия, и поэтому при ограниченном их числе преподавателю бывает трудно решить, какие разделы ТВ и МС следует прочитать, а какие нет, не нарушая при этом стройности изложения.

Данная книга содержит несколько больше материала, чем необходимо для прочтения 18 лекций и проведения 18 практических занятий. В частности, все утверждения аккуратно доказываются, но в реальных лекциях некоторые из этих доказательств могут быть опущены по усмотрению лектора. В конце каждого параграфа (темы) имеются типовые задачи с решениями, которые могут послужить основой для проведения практических занятий. В конце каждой главы приводятся задачи, предназначенные для самостоятельного решения, а также задачи повышенной сложности (отмеченные звездочкой). Ответы к задачам для самостоятельного решения даны в конце книги. Детальность доказательств и наличие дополнительных задач позволяют студенту самостоятельно изучить материал, не рассматривавшийся на лекциях или семинарах.

В обычном учебнике при доказательстве теорем часто отсутствуют ссылки на понятия или свойства, введенные или установленные в предыдущих разделах и главах. При этом предполагается, что студент усвоил весь предыдущий материал и все помнит. К сожалению, это предположение на практике не всегда выполняется. И тогда студенту, встретившему ссылку на материал, который он не помнит, остается перечитать весь учебник заново либо отложить его в сторону. В предлагаемом пособии вывод каждой формулы сопровождается не абстрактными «отсылками» к предыдущим разделам, а четкими ссылками на изученные свойства и введенные понятия. В пособии присутствует сравнительно немного символических объектно-ориентированных сокращений, тем не менее с ними лучше познакомиться заранее, до начала чтения пособия. Для удобства читателя все сокращения, символические записи и основные обозначения собраны вместе в отдельный список.

Следует отметить, что большинство учебников по ТВ и МС, опубликованных в нашей стране, либо вообще не содержат прикладных примеров, либо эти примеры имеют однобокую (например, военную) окраску. Но, очевидно, что для эффективного использования на практике полученных теоретических знаний студент должен уметь самостоятельно строить математические модели для конкретных прикладных задач. По этой причине в данное пособие вставлены разнообразные примеры технического и экономического характера, позволяющие студенту глубже понять физический и экономический смысл изучаемого им курса.

Пособие имеет четкую иерархическую структуру, роднящую его со справочниками. В частности, имеется подробный предметный указатель. Вся информация, содержащаяся в книге, подразделена на блоки, называемые замечаниями, примерами, теоремами или свойствами. Отметим, что «вольный» текст, отражающий мнение авторов, встречаются только в замечаниях. Таким образом, каждый параграф (тема) состоит из пунктов (разделов), названия которых вынесены в оглавление, а каждый раздел состоит из этих блоков. В каждом параграфе нумерация блоков является автономной. Поэтому легко организуются ссылки из последующих пунктов на предыдущие.

На основании данного пособия разработан компьютерный учебник, который позволяет мгновенно находить отмеченные выше ссылки и получать многочисленные комментарии и пояснения. Комментарии можно получить как из оглавления и предметного указателя, так и из самого текста. Более детально с возможностями компьютерного учебника можно ознакомиться в [13].

При написании книги авторы ориентировались на известные учебники по ТВ и МС. В частности, многие технические примеры взяты из [23], экономические примеры из [31], а парадоксальные примеры из [26]. Лаконичность изложения в книгах [27], [20] служила образцом для авторов. Большая часть справочного материала заимствована из [18]. Структура пособия во многом повторяет учебники [23], [12]. Следует отметить, что настоящее пособие является не первой попыткой изложить курс ТВ и МС в таком виде. Авторы в своей работе в значительной мере опирались на предшествующие версии пособий по предлагаемому курсу [15], [8]. Но данное пособие было написано практически заново, в него были включены дополнительные примеры и усилена строгость изложения материала.

Авторы благодарят В.А. Ефремова за помощь в подготовке рукописи.

СПИСОК ОСНОВНЫХ СОКРАЩЕНИЙ И ОБОЗНАЧЕНИЙ

1. Математические символы.

$A \backslash B$ — разность событий A и B
$A+B$ — сумма событий A и B
AB — произведение событий A и B
$\exp(x) \triangleq e^x$
$\mathrm{col}(x_1, \ldots, x_n)$ — вектор–столбец с компонентами $x_1, \ldots, x_n$
$\omega \in A$ — элемент ω принадлежит множеству A
$\omega \notin A$ — элемент ω не принадлежит множеству A
$A \subset B$ — событие A влечет появление события B
$k = \overline{1,n}$ — множество натуральных чисел от 1 до n
$\triangleq$ — равенство по определению
$\equiv$ — тождество
$\sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ — сумма величин x_k, $k = \overline{1,n}$
$\sum\limits_{k=1}^{n} A_k$ — сумма событий A_k, $k = \overline{1,n}$
$\prod\limits_{k=1}^{n} x_k$ — произведение величин x_k, $k = \overline{1,n}$
$\prod\limits_{k=1}^{n} A_k$ — произведение событий A_k, $k = \overline{1,n}$
$\mathbf{M}[X]$ — математическое ожидание СВ X
$\mathbf{D}[X]$ — дисперсия СВ X
$\mathbf{P}(A)$ — вероятность события A
$\mathbb{R}^1$ — действительная ось
$\det K$ — определитель матрицы K
A^T — транспонированная матрица
I — единичная матрица

2. Обозначения.

A, B, C — случайные события
$\overline{A}$ — противоположное событие
ω — элементарное событие
Ω — пространство элементарных событий, достоверное событие
$\varnothing$ — невозможное событие
$W_n(A)$ — частота появления события A в n опытах

$\mathbf{P}(A)$ — вероятность события A
$\mathbf{P}(A|B)$ — условная вероятность события A относительно B
H_k — k–я гипотеза
C_n^m — число сочетаний из n по m
X, Y, Z — случайные величины
x, y, z — реализации СВ
$\{\omega : X(\omega) \leqslant x\}$ — множество ω, для которых $X(\omega) \leqslant x$
$F(x) \triangleq F_X(x)$ — функция распределения СВ X
$f(x) \triangleq f_X(x)$ — плотность распределения СВ X
$\mathbf{P}\{X \leqslant x\}$ — вероятность события $\{\omega : X(\omega) \leqslant x\}$
$p_i \triangleq \mathbf{P}\{X = x_i\}$ — вероятность события $\{X = x_i\}$
$m_X \triangleq \mathbf{M}[X]$ — математическое ожидание (МО) СВ X
ν_r, μ_r — начальный и центральный моменты порядка r
$d_X \triangleq \mathbf{D}[X]$ — дисперсия СВ X
σ_X — среднее квадратическое отклонение СВ X
$\overset{\circ}{X}$ — центрированная СВ
$\overset{*}{X}$ — нормированная СВ
$X \sim \mathbf{Bi}(n;p)$ — СВ X имеет биномиальное распределение с параметрами n и p
$X \sim \mathbf{\Pi}(a)$ — СВ X имеет распределение Пуассона с параметром a
$X \sim \mathbf{R}(a;b)$ — СВ X имеет равномерное распределение на отрезке $[a,b]$
$X \sim \mathbf{E}(\lambda)$ — СВ X имеет экспоненциальное распределение с параметром λ
$X \sim \mathbf{N}(m;\sigma^2)$ — СВ X имеет нормальное распределение с параметрами m и σ
$\Phi_0(x)$ — функция Лапласа
$\Gamma(x)$ — гамма-функция Эйлера
x_α — квантиль уровня α функции распределения $F(x)$ СВ X
$F(x,y)$ — функция распределения двумерной СВ $Z \triangleq \mathrm{col}(X,Y)$
$f(x,y)$ — плотность распределения двумерной СВ $Z \triangleq \mathrm{col}(X,Y)$
k_{XY} — ковариация СВ X и Y
r_{XY} — коэффициент корреляции СВ X и Y
$\mathbf{M}[Y|X]$ — условное математическое ожидание Y относительно X
$Z_n \triangleq \mathrm{col}(X_1,\ldots,X_n)$ — вектор–столбец из элементов $X_1,\ldots,X_n$
$F(x_1,\ldots,x_n)$ — функция распределения СВ $Z \triangleq \mathrm{col}(X_1,\ldots,X_n)$
$f(x_1,\ldots,x_n)$ — плотность распределения СВ $Z \triangleq \mathrm{col}(X_1,\ldots,X_n)$
K — ковариационная матрица с элементами k_{ij}, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$
R — корреляционная матрица
$p_{ij} \triangleq \mathbf{P}\{X = x_i, Y = y_j\}$
$\{X_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, — случайная последовательность (СП)

$X_n \xrightarrow{F} X$ — сходимость СП $\{X_n\}$ к СВ X по распределению
$X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} X$ — сходимость СП $\{X_n\}$ к СВ X по вероятности
$X_n \xrightarrow{\text{с.к.}} X$ — сходимость СП $\{X_n\}$ к СВ X в среднем квадратическом
$X_n \xrightarrow{\text{п.н.}} X$ — сходимость СП $\{X_n\}$ к СВ X почти наверное
$\widehat{\nu}_r,\ \widehat{\mu}_r$ — выборочные начальные и центральные моменты порядка r
$\widehat{m}_X \triangleq \widehat{\nu}_1$ — выборочное среднее
$\widehat{d}_X \triangleq \widehat{\mu}_2$ — выборочная дисперсия
$\widehat{s}_X \triangleq \dfrac{n}{n-1}\widehat{d}_X$ — несмещенная выборочная дисперсия
$Z_n \triangleq \mathrm{col}(X_1, \ldots , X_n)$ — выборка объема n
$z_n \triangleq \mathrm{col}(x_1, \ldots , x_n)$ — реализация выборки объема n
$X \sim \chi^2(n)$ — СВ X имеет распределение хи–квадрат с n степенями свободы
$X \sim \mathbf{S}\,(n)$ — СВ X имеет распределение Стьюдента с n степенями свободы
$X \sim \mathbf{F}\,(n; m)$ — СВ X имеет распределение Фишера с n и m степенями свободы
$\widehat{\theta}(Z_n)$ — выборочная оценка параметра θ
$L(z_n, \theta)$ — функция правдоподобия

3. Сокращения.

ММП — метод максимального правдоподобия
МНК — метод наименьших квадратов
МО — математическое ожидание
СВ — случайная величина
СП — случайная последовательность
п.н. — почти наверное
с.к. — среднее квадратическое
ЗБЧ — закон больших чисел
ЦПТ — центральная предельная теорема

ГЛАВА I

СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

§ 1. Основные понятия

1.1. Пространство элементарных событий. *Теория вероятностей* — раздел математики, изучающий закономерности случайных явлений, наблюдаемых при многократном повторении опыта.

Под *опытом* G понимается воспроизведение какого-либо комплекса условий для наблюдения исследуемого явления (*события*). Обычно считается, что *событие случайно* в опыте, если при неоднократном воспроизведении этого опыта оно иногда происходит, а иногда — нет, причем нельзя заранее предсказать возможный исход (событие) этого опыта. При этом наблюдается *свойство устойчивости частоты* случайного события: с увеличением числа повторений опыта значение частоты появления случайного события стабилизируется около некоторого неслучайного числа.

Пример 1.1. Пусть опыт G состоит в подбрасывании игральной кости и наблюдении числа выпавших очков X. Тогда можно ввести следующие случайные события: $\{X = 1\}$, $\{X = 2\}$, ..., $\{X = 6\}$, $\{X \leqslant 2\}$, $\{2 < X \leqslant 6\}$, $\{X - \text{четно}\}$, $\{X - \text{нечетно}\}$ и т. д.

Возможные исходы ω опыта G называются *элементарными событиями*, если они являются взаимно исключающими и в результате опыта G одно из них обязательно происходит. Совокупность Ω всех элементарных событий ω в опыте G называется *пространством элементарных событий.*

Пространство элементарных событий — это математическая модель опыта, в которой любому *событию* ставится в соответствие некоторое подмножество пространства Ω. В общем случае каждому опыту G можно сопоставить несколько математических моделей, т. е. пространств элементарных событий.

Пример 1.2. В примере 1.1 пространство элементарных событий $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_6\}$, а элементарное событие ω_i состоит в том, что $\{X = i\}$, $i = \overline{1,6}$. Событие $\{X - \text{четно}\} = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$ является подмножеством пространства Ω.

Определение 1.1. Событие называется *невозможным* в опыте G, если при повторении опыта оно никогда не происходит. Ему соответствует пустое подмножество в Ω, которое обозначают $\varnothing$.

Определение 1.2. Событие называется *достоверным* в опыте G, если при повторении опыта оно происходит всегда. Ему соответствует пространство Ω.

События будем обозначать большими латинскими буквами A, B, C и т. д.

Определение 1.3. Говорят, что в опыте G событие A *влечет появление* события B, если из осуществления события A следует наступление события B, т. е. каждый элемент множества A принадлежит множеству B. Это обозначается так: $A \subset B$.

1.2. Алгебра событий.

Определение 1.4. События A и B называются *равными*, $A = B$, если $A \subset B$ и $B \subset A$.

Определение 1.5. *Суммой событий* A и B называется событие $A + B$, состоящее в том, что в опыте произойдет хотя бы одно из этих событий. Событию $A + B$ соответствует множество, элементы которого принадлежат хотя бы одному из множеств A или B, т. е. объединение множеств A и B.

Определение 1.6. *Произведением событий* A и B называется событие AB, состоящее в одновременном появлении этих событий. Событию AB соответствует множество с элементами, принадлежащими одновременно множествам A и B, т. е. пересечение множеств A и B.

Определение 1.7. *Разностью событий* A и B называется событие $A \backslash B$, состоящее в том, что событие A произойдет, а событие B — нет, т. е. событию $A \backslash B$ соответствует множество, состоящее из элементов множества A, не принадлежащих множеству B.

Определение 1.8. Событие $\overline{A}$ называется *противоположным* событию A, если оно заключается в непоявлении события A. Событию $\overline{A}$ соответствует множество всех элементов пространства Ω, не принадлежащих множеству A, т. е. $\overline{A} = \Omega \backslash A$.

Пример 1.3. Пусть опыт G заключается в проведении стрельбы наугад по квадрату «Ω», точки которого являются элементарными событиями ω. Пусть попадание в квадрат «Ω» есть достоверное событие Ω, а попадание в области «A» и «B» — события A и B. Тогда события $\overline{A}$, $A + B$, AB, $A \backslash B$ представлены на рис. 1.1.

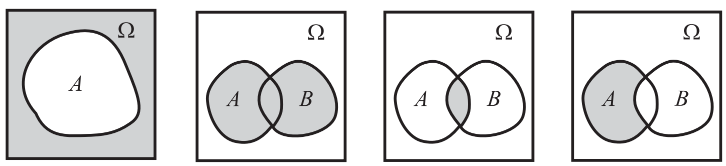
Графические изображения на плоскости соотношений между множествами называются *диаграммами Венна.*

Определение 1.9. События A и B называются *несовместными*, если они не могут произойти одновременно в одном опыте, т. е. $AB = \varnothing$.

Рассмотрим основные свойства операций над событиями (свойства событий).

Свойства событий

1) $\Omega + A = \Omega$;
2) $\Omega A = A$;
3) $AA = A$ (но не A^2);
4) $A + A = A$ (но не $2A$);
5) $A + \varnothing = A$;
6) $A\varnothing = \varnothing$;
7) $(A\backslash B)(B\backslash A) = \varnothing$;
8) $A + B = B + A$;
9) $AB = BA$;
10) $C(A + B) = CA + CB$;
11) $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$, $\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$;
12) $A + \overline{A} = \Omega$, $\overline{\overline{A}} = A$.



$\overline{A}$ $A+B$ AB $A\backslash B$

Рис. 1.1

Определение 1.10. Класс $\mathcal{F}$ подмножеств пространства Ω называется *алгеброй событий*, если $\Omega \in \mathcal{F}$ и если $AB \in \mathcal{F}$, $A+B \in \mathcal{F}$, $A\backslash B \in \mathcal{F}$ при любых $A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{F}$.

Замечание 1.1. Алгебру событий иногда называют также *алгеброй Буля*.

1.3. Вероятность события.

Определение 1.11. Пусть при n-кратном повторении опыта G событие A произошло m_A раз. *Частотой* $W_n(A)$ события A называется отношение $W_n(A) = m_A/n$.

Свойства частоты $W_n(A)$

1) $W_n(A) \geqslant 0$, так как $m_A \geqslant 0$ и $n > 0$;
2) $W_n(A) \leqslant 1$, так как $m_A \leqslant n$;
3) если при n-кратном повторении опыта несовместные события A и B появились соответственно m_A и m_B раз, то

$$W_n(A+B) \triangleq \frac{m_{A+B}}{n} = \frac{m_A + m_B}{n} = \frac{m_A}{n} + \frac{m_B}{n} = W_n(A) + W_n(B).$$

Априори (заранее, до опыта) частота $W_n(A)$ является случайной, т. е. нельзя предсказать точное её значение до проведения данной серии из n опытов. Однако природа случайных событий такова, что на практике наблюдается эффект устойчивости частот. Его суть заключается в том, что при увеличении числа опытов значение частоты практически перестает быть случайным и стабилизируется около некоторого неслучайного числа $\mathbf{P}(A)$, соответствующего данному конкретному событию A в опыте G (точные формулировки приведены в § 13, теорема 13.6).

Замечание 1.2. Число $\mathbf{P}(A)$ первоначально при становлении теории вероятностей называлось *вероятностью* события A в опыте G. Введенное понятие указывает на то, что вероятность $\mathbf{P}(A)$ характеризует частоту появления события A при многократном повторении опыта G.

Но частотное определение вероятности было неудобно по двум причинам: 1) стремление частоты события A к вероятности события происходит не в общепринятом смысле, а в вероятностном; 2) вычисление предельного значения $\mathbf{P}(A)$, к которому стремится частота, может быть невозможным вследствие значительных трудностей при проведении большого числа опытов. Поэтому рассмотрим так называемое аксиоматическое определение вероятности.

Определение 1.12. Класс $\mathcal{F}$ подмножеств пространства Ω, включающий в себя результаты сложения и умножения *счетного* числа своих элементов (т. е. замкнутый относительно этих операций), называется *σ-алгеброй*. Элементы σ-алгебры $\mathcal{F}$ (т. е. подмножества пространства Ω) называются *случайными событиями* (или просто *событиями*).

Напомним, что множество A называется *счетным*, если между всеми элементами A и множеством натуральных чисел можно установить взаимно однозначное соответствие. Например, множество $\{1, 1/2, \ldots, 1/n, \ldots\}$ является счетным.

Определение 1.13. *Вероятностью события* A называется числовая функция $\mathbf{P}(A)$, определенная на σ-алгебре $\mathcal{F}$ и удовлетворяющая следующим четырем *аксиомам теории вероятностей*.

Аксиомы теории вероятностей

A1. (*Неотрицательность вероятности*) Каждому событию $A \in \mathcal{F}$ ставится в соответствие неотрицательное число $\mathbf{P}(A)$, т. е. $\mathbf{P}(A) \geqslant 0$ для любого $A \in \mathcal{F}$.

A2. (*Нормировка вероятности*) Вероятность достоверного события равна единице, т. е. $\mathbf{P}(\Omega) = 1$.

A3. (*Конечная аддитивность вероятности*) Для любых несовместных событий A и B справедливо равенство

$$\mathbf{P}(A+B)=\mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B).$$

A4. (*Непрерывность вероятности*) Для любой убывающей последовательности $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$ событий из $\mathcal{F}$, такой, что $A_1 A_2 \cdot \ldots \cdot A_n \cdot \ldots = \varnothing$, имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n)=0.$$

Аксиомы **A1**–**A3** тесно связаны со свойствами частоты. В дальнейшем аксиома **A4** и предположение о замкнутости алгебры событий $\mathcal{F}$ относительно счетного числа операций почти не используется. Отметим также, что аксиомы **A3**, **A4** о конечной аддитивности и непрерывности вероятности могут быть заменены на эквивалентную аксиому о счетной аддитивности вероятности (см. п. 3.2).

§ 2. Основные свойства вероятности

2.1. Аксиоматические свойства.

Определение 2.1. Если $\mathbf{P}(A)=1$, но A не равно Ω, то говорят, что событие A в опыте G происходит *почти наверное* (п.н.).

Определение 2.2. Если $\mathbf{P}(A)=0$, то говорят, что событие A *почти никогда не происходит в опыте* G.

Свойства P(A)

1) Пусть $\mathbf{P}(A)=1$. По аксиоме **A2** $\mathbf{P}(\Omega)=1$, но из этого не следует, что $A=\Omega$ (т.е. что A является достоверным событием).

2) $\mathbf{P}(\varnothing)=0$, т.е. вероятность невозможного события равна нулю. Во-первых, $\varnothing \in \mathcal{F}$, поскольку σ-алгебре $\mathcal{F}$ принадлежит само событие Ω и его дополнение $\overline{\Omega} \triangleq \Omega\backslash\Omega=\varnothing$. Во-вторых, $\Omega+\varnothing= =\Omega$. Поэтому, с одной стороны, по аксиоме **A2** получаем $\mathbf{P}(\Omega+\varnothing)= =\mathbf{P}(\Omega)=1$, с другой стороны, по аксиомам **A3** и **A2** имеем

$$\mathbf{P}(\Omega+\varnothing)=\left\| \begin{array}{l} \Omega\cdot\varnothing=\varnothing, \text{ так как собы-} \\ \text{тия } \Omega \text{ и } \varnothing \text{ несовместны} \end{array} \right\| =\mathbf{P}(\Omega)+\mathbf{P}(\varnothing)=1+\mathbf{P}(\varnothing).$$

Отсюда следует, что $\mathbf{P}(\varnothing)=0$.

3) Пусть $\mathbf{P}(A) = 0$. По свойству 2)P имеем $\mathbf{P}(\varnothing) = 0$, но из этого не следует, что $A = \varnothing$, т. е. событие A не обязательно является невозможным.

4) Если $A \subset B$, то $\mathbf{P}(A) \leqslant \mathbf{P}(B)$, т. е. вероятность монотонна. Представим множество B как $B = A + B\backslash A$ (рис. 2.1). По построению $A(B\backslash A) = \varnothing$, следовательно, события A и $B\backslash A$ несовместны. Поэтому по аксиомам **A3** и **A1** имеем $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B\backslash A) \geqslant \mathbf{P}(A)$.

5) $\mathbf{P}(A) \leqslant 1$ для любого $A \in \mathcal{F}$. Так как $A \subset \Omega$, то из свойства 4)P и аксиомы **A2** следует $\mathbf{P}(A) \leqslant \mathbf{P}(\Omega) = 1$.

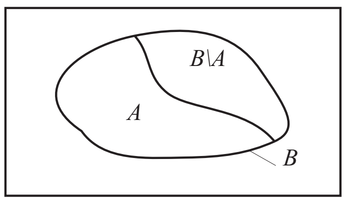


Рис. 2.1

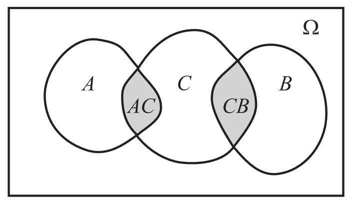


Рис. 2.2

6) $\mathbf{P}(A + B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(AB)$ для любых $A, B \in \mathcal{F}$. Представим A в виде $A = A\backslash B + AB$. Очевидно, что $(A\backslash B)(AB) = \varnothing$. Тогда по аксиоме **A3** имеем $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A\backslash B) + \mathbf{P}(AB)$, откуда

$$\mathbf{P}(A\backslash B) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(AB).$$

Аналогичным образом поступим с событием $A + B$. Имеем $A + B = B + A\backslash B$, причем $B(A\backslash B) = \varnothing$. Тогда из аксиомы **A3** следует

$$\mathbf{P}(A + B) = \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(A\backslash B).$$

Подставляя в данное выражение формулу для $\mathbf{P}(A\backslash B)$, получаем требуемое.

7) $\mathbf{P}(A + B) \leqslant \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$ для любых A, $B \in \mathcal{F}$. Из аксиомы **A1** следует $\mathbf{P}(AB) \geqslant 0$, поэтому по свойству 6)P получаем

$$\mathbf{P}(A + B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(AB) \leqslant \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B).$$

По индукции можно получить неравенство

$$\mathbf{P}\Big(\sum_{i=1}^{n} A_i\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i).$$

8) На основе аксиомы **A3** по индукции можно показать, что если события $A_1, \ldots, A_n$ попарно несовместны, то

$$\mathbf{P}\Big(\sum_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i).$$

9) Пусть события A и B несовместны, т.е. $AB = \varnothing$. Тогда верно $\mathbf{P}(C(A+B)) = \mathbf{P}(CA) + \mathbf{P}(CB)$. По предположению имеем $(CA)(CB) = \varnothing$, так как $AB = \varnothing$. И кроме того, по свойству событий 10) A имеем $C(A+B) = CA + CB$. Следовательно, по аксиоме **А3** получаем (рис. 2.2)

$$\mathbf{P}(C(A+B)) = \mathbf{P}(CA+CB) = \mathbf{P}(CA) + \mathbf{P}(CB).$$

2.2. Свойства вероятности для полной группы событий.

Определение 2.3. События $H_1, \ldots, H_n$ в опыте G образуют *полную группу несовместных событий*, если они попарно несовместны ($H_iH_j = \varnothing$ при $i \neq j$) и в результате опыта произойдет хотя бы одно из событий H_i, $i = \overline{1,n}$, т.е. $H_1 + \ldots + H_n = \Omega$. События $H_1, \ldots, H_n$ называются *гипотезами*, если они образуют полную группу несовместных событий и $P(H_i) > 0, \quad i = \overline{1,n}$.

Определение 2.4. Рассмотрим опыт G с конечным числом возможных исходов $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$, где ω_i — элементарные события, образующие полную группу несовместных событий, появление которых равновероятно, т.е. $\mathbf{P}(\omega_i) = p$, $i = \overline{1,n}$. Такие события $\omega_1, \ldots, \omega_n$ называются *случаями*, а про опыт G говорят, что он *сводится к схеме случаев*.

Определение 2.5. Рассмотрим в опыте G, сводящемся к схеме случаев, произвольное событие A, которое можно представить в виде суммы m случаев, т.е. $A = \omega_{i_1} + \ldots + \omega_{i_m}$ при $m \leqslant n$. Тогда такие слагаемые $\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_m}$ называют *случаями, благоприятствующими событию* A (или *благоприятными случаями*).

Определение 2.6. *Условной вероятностью* $\mathbf{P}(A|B)$ события A относительно события B, если $\mathbf{P}(B) > 0$, называется вероятность осуществления события A при условии, что событие B уже произошло. Условная вероятность определяется формулой

$$\mathbf{P}(A|B) \triangleq \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(B)}.$$

Свойства P(A) (продолжение)

10) Если события $H_1, \ldots, H_n$ образуют полную группу несовместных событий, то

$$\mathbf{P}(H_1) + \ldots + \mathbf{P}(H_n) = \mathbf{P}(H_1 + \ldots + H_n) = 1.$$

Данное свойство непосредственно вытекает из определения 2.3, аксиомы **А2** и свойства 8)P.

11) $\mathbf{P}(A) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A})$. По определению $\overline{A} = \Omega \backslash A$, поэтому $A\overline{A} = \varnothing$. По свойству 12) A имеем $A + \overline{A} = \Omega$, т. е. события A и $\overline{A}$ образуют полную группу несовместных событий. Следовательно, по свойству 10)P: $\mathbf{P}(A + \overline{A}) = 1$. Так как A и $\overline{A}$ несовместны, то по аксиоме **А3** имеем: $1 = \mathbf{P}(A + \overline{A}) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(\overline{A})$, откуда следует искомая формула.

12) $\mathbf{P}(A+B) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A} \cdot \overline{B})$. По свойству 11) A имеем $\overline{A + B} = \overline{A} \times \times \overline{B}$. Поэтому из свойства 11)P следует $\mathbf{P}(A + B) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A + B}) = = 1 - \mathbf{P}(\overline{A} \cdot \overline{B})$.

13) $\mathbf{P}(AB) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A} + \overline{B})$. Это следует из свойства 12)P, если вместо событий A и B рассмотреть соответственно события $\overline{A}$ и $\overline{B}$ и использовать свойство событий 12) A: $\overline{\overline{A}} = A$.

14) Если опыт G сводится к схеме случаев, то $\mathbf{P}(\omega_i) = p = 1/n$, $i = \overline{1,n}$. Действительно, так как события $\omega_1, \ldots, \omega_n$ несовместны, то по аксиоме **А2** и свойству вероятности 8)P имеем

$$1 = \mathbf{P}(\Omega) = \mathbf{P}(\omega_1 + \ldots + \omega_n) = \mathbf{P}(\omega_1) + \ldots + \mathbf{P}(\omega_n) = np.$$

15) Если событие A представимо в виде суммы m благоприятных случаев из общего числа n случаев, то вероятность такого события находится по *классической формуле вычисления вероятности*: $\mathbf{P}(A) = = m/n$. Действительно,

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(\omega_{i_1} + \ldots + \omega_{i_m}) = \mathbf{P}(\omega_{i_1}) + \ldots + \mathbf{P}(\omega_{i_m}) = \frac{m}{n}.$$

Пример 2.1. Опыт состоит в подбрасывании игральной кости (см. пример 1.1). Требуется найти вероятность выпадения четного числа очков (события A). В данном случае опыт сводится к схеме случаев, если в качестве элементарных событий ω_i, $i = \overline{1,6}$, взять положения верхней грани кости. Тогда $n = 6$, а $m = 3$, поскольку $A = \omega_2 + \omega_4 + \omega_6$. Таким образом, $\mathbf{P}(A) = 1/2$.

16) Рассмотрим опыт G, сводящийся к схеме случаев, и предположим, что событиям A, B, AB благоприятствуют соответственно m_A, $m_B > 0$, m_{AB} случаев из всех n возможных. Допустим, что событие B уже произошло. Это означает, что из всех возможных n случаев реально могло появиться только m_B случаев, причем из них только m_{AB} случаев благоприятствуют событию A. Тогда $\mathbf{P}(A|B) = = m_{AB}/m_B$. Действительно, получаем

$$\mathbf{P}(A|B) \triangleq \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{m_{AB}}{n} \, \frac{n}{m_B} = \frac{m_{AB}}{m_B}.$$

17) $\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B|A) = \mathbf{P}(B)\mathbf{P}(A|B)$. Данная формула следует из определения 2.6 и свойства коммутативности операции

умножения событий: $AB = BA$. Действительно,

$$\mathbf{P}(B)\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(BA) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B|A).$$

Одной из основных формул для подсчета вероятности случайного события является классическая формула, приведенная в свойстве 15)P. В схеме случаев предлагается следующий порядок решения задач с помощью этой формулы.

1) Определить элементарные события, сводя опыт к схеме случаев.

2) Подсчитать количество n всех случаев.

3) Описать событие A, вероятность которого требуется найти.

4) Подсчитать число m_A случаев, благоприятствующих событию A.

5) Воспользоваться классической формулой вычисления вероятности $\mathbf{P}(A) = m_A/n$.

Замечание 2.1. При выделении случаев исходят, как правило, из интуитивных соображений о симметрии исходов и их равновозможности.

2.3. Типовые задачи.

Задача 2.1. В отдел технического контроля поступила партия из 15 изделий, среди которых 5 бракованных. Для проверки качества партии наугад выбрано одно изделие. С какой вероятностью оно окажется бракованным?

Решение. Перенумеруем все изделия и определим элементарные события (случаи)

$$\omega_i = \{\text{выбор } i\text{-го изделия}\}, \quad i = \overline{1,\,15}.$$

Таких элементарных событий 15, т. е. $n = 15$. Опишем событие A, вероятность которого требуется найти:

$$A = \{\text{выбор бракованного изделия}\}.$$

Число элементарных событий, благоприятствующих событию A, равно количеству бракованных деталей, т. е. $m_A = 5$. Тогда согласно классической формуле вычисления вероятности

$$\mathbf{P}(A) = \frac{m_A}{n} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}.$$

Ответ. $\mathbf{P}(A) = 1/3$.

Задача 2.2. Усложним предыдущую задачу. Предположим, что для проверки партии, состоящей из 15 изделий, среди которых находятся 5 бракованных, выбираются 3 изделия. Партия считается бракованной, если бракуется хотя бы одно изделие. Требуется найти вероятность того, что партия будет забракована.

Р е ш е н и е. Следуя предложенному выше порядку решения задачи, определим элементарное событие в рассматриваемом опыте следующим образом:

$$\omega = \left\{ \begin{matrix} \text{последовательность из трех деталей,} \\ \text{выбранных из 15 деталей} \end{matrix} \right\}.$$

Все такие элементарные события равновероятны и образуют полную группу несовместных событий, т. е. опыт сведен к схеме случаев. Для того чтобы подсчитать количество n всех возможных случаев, используем так называемую *схему выбора без возвращения*. Первую деталь для проверки можно выбрать 15 способами (по количеству имеющихся в партии деталей). При проверке для каждого способа выбора первой детали существует 14 способов выбрать вторую деталь (так как одна деталь, выбранная первой, уже отсутствует). Таким образом, при проверке общее количество способов выбора 2-х деталей равняется $15 \cdot 14$. Рассуждая далее аналогичным образом, получаем

$$n = 15 \cdot 14 \cdot 13.$$

Опишем теперь событие A, вероятность которого требуется найти:

$$A = \left\{ \begin{matrix} \text{в последовательности из трех выбранных} \\ \text{деталей окажется хотя бы одна бракованная} \end{matrix} \right\}.$$

Рассмотрим событие $\overline{A}$, противоположное событию A:

$$\overline{A} = \left\{ \begin{matrix} \text{в последовательности из трех выбранных} \\ \text{деталей не окажется ни одной бракованной} \end{matrix} \right\}.$$

Подсчитаем число элементарных событий, благоприятствующих событию $\overline{A}$. С этой целью повторим рассуждения, использованные для подсчета n. Выбирая детали только из 10 небракованных, получим

$$m_{\overline{A}} = 10 \cdot 9 \cdot 8.$$

Тогда, используя классическую формулу вычисления вероятности, окончательно будем иметь

$$\mathbf{P}(A) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{15 \cdot 14 \cdot 13} = 1 - \frac{24}{91} = \frac{67}{91}.$$

О т в е т. $\mathbf{P}(A) = 67/91$.

З а д а ч а 2.3. Для 20 участников конференции, среди которых 12 российских, в гостинице забронировано 20 номеров. Из этих номеров

12 — с видом на море. Портье наугад выдает участникам конференции ключи от номеров. Найти вероятность того, что номера с видом на море достанутся 12 российским участникам конференции.

Р е ш е н и е. Процедура выделения гостиничных номеров участникам конференции представляет собой присвоение каждой фамилии в списке участников номера, выбранного наугад портье. Определим элементарное событие

$$\omega = \left\{ \begin{array}{c} \text{последовательность из номеров аппартамен-} \\ \text{тов, образованная согласно упорядоченному} \\ \text{списку участников конференции} \end{array} \right\}.$$

Все такие элементарные события равновероятны и образуют полную группу несовместных событий, т. е. опыт сведен к схеме случаев. Для подсчета числа n всех таких случаев воспользуемся схемой выбора без возвращения. Получаем

$$n = 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = 20!\,.$$

Заметим, что мы получили известную в комбинаторике величину $k!$, равную количеству всех способов сформировать различные последовательности из k элементов, т. е. *числу всех возможных перестановок k элементов.*

Опишем событие A, вероятность которого требуется найти:

$$A = \left\{ \begin{array}{c} \text{двенадцати российским участникам конференции доста-} \\ \text{нутся номера с видом на море, а остальные номера} \\ \text{будут распределены между оставшимися участниками} \end{array} \right\}.$$

Найдем число m_A случаев, благоприятствующих событию A. Для этого распределим сначала номера с видом на море среди российских участников конференции. Это можно сделать 12! способами, согласно рассуждениям, приведенным при подсчете n. На каждый способ распределить указанные номера среди российских участников конференции существует 8! способов распределить оставшиеся номера среди остальных участников. Таким образом, общее количество элементарных событий, благоприятствующих событию A равняется $12! \cdot 8!$. Следовательно,

$$m_A = 12! \cdot 8!.$$

Для нахождения $\mathbf{P}(A)$ воспользуемся классической формулой

$$\mathbf{P}(A) = \frac{m_A}{n} = \frac{8!12!}{20!}\,.$$

О т в е т. $\mathbf{P}(A) = 8!\,12!/20!$.

З а д а ч а 2.4. Подбрасывают K игральных костей. Найти вероятность получения суммы очков, равной: *а*) K; *б*) $K+1$.

Р е ш е н и е. *а*) Предположим, что в данной задаче все кости занумерованы от 1 до K. Будем понимать под элементарным событием

$$\omega = \left\{\begin{matrix}\text{последовательность из } K \text{ цифр, соответству-}\\ \text{ющих числу выпавших очков на каждой кости}\end{matrix}\right\}.$$

Все такие элементарные события равновероятны и образуют полную группу несовместных событий, т. е. опыт сведен к схеме случаев. При подсчете числа n всех случаев воспользуемся схемой выбора с возвращением. На первой игральной кости число очков может появиться 6 способами (любая цифра от 1 до 6). Для каждого способа появления числа очков на первой кости существует 6 способов появления числа очков на второй игральной кости и т. д. (см. задачу 2.2). Таким образом, общее число всех возможных элементарных событий

$$n = 6^K.$$

Опишем событие A, вероятность которого нужно найти:

$$A = \{\text{сумма очков на } K \text{ подброшенных костях равна } K\}.$$

Заметим, что появление этого события эквивалентно тому, что на всех игральных костях выпало по одному очку. Очевидно, что это может произойти единственным способом, т. е. число элементарных событий, благоприятствующих событию A, равно единице $(m_A = 1)$.

Следовательно, согласно классической формуле вычисления вероятности

$$\mathbf{P}(A) \triangleq \frac{m_A}{n} = \frac{1}{6^K}.$$

б) Поскольку опыт не изменился, элементарные события и величина n остаются прежними. Изменяется лишь событие, вероятность которого требуется найти:

$$B = \{\text{сумма очков на } K \text{ подброшенных костях равна } K+1\}.$$

Событие B эквивалентно тому, что на $K-1$ игральной кости выпадет по одному очку, а на одной игральной кости выпадет два очка. Подсчет числа элементарных событий, благоприятствующих событию B, сводится, таким образом, к нахождению количества способов выбрать одну игральную кость из K, на которой должно выпасть два очка. Очевидно, что есть K таких способов. Следовательно, $m_B = K$. Таким образом,

$$\mathbf{P}(B) = \frac{K}{6^K}.$$

О т в е т. *а*) $1/6^K$; *б*) $K/6^K$.

Задача 2.5. Три студента МАИ, два студента МЭИ и четыре студента МГУ наугад рассаживаются в три вагона. Для каждого пассажира вероятность оказаться в любом из вагонов одинакова. Найти вероятности следующих событий:

а) три студента МАИ окажутся в разных вагонах;

б) два студента МЭИ окажутся в разных вагонах.

Решение. *а*) Определим элементарное событие для рассматриваемого в задаче опыта следующим образом:

$$\omega = \left\{ \begin{array}{c} \text{последовательность из номеров вагонов, образован-} \\ \text{ная согласно упорядоченному списку пассажиров} \end{array} \right\}.$$

Все такие элементарные события равновероятны и образуют полную группу несовместных событий, т. е. опыт сведен к схеме случаев. Для подсчета числа n всех случаев воспользуемся процедурой, описанной в предыдущей задаче. В результате получим

$$n = 3^9.$$

Нас интересует вероятность события

$$A = \{\text{три студента МАИ окажутся в разных вагонах}\}.$$

Распределим сначала имеющиеся у нас три билета с номерами различных вагонов среди студентов МАИ. Действуя аналогично процедуре, описанной в задаче 2.3, получаем, что это можно сделать $3!$ способами. На каждый такой способ существует 3^6 способов приписать номера вагонов всем оставшимся пассажирам. Таким образом,

$$m_A = 3!\,3^6.$$

В результате получаем

$$\mathbf{P}(A) = \frac{m_A}{n} = \frac{3!\,3^6}{3^9} = \frac{3!}{3^3} = \frac{2}{9}.$$

б) В этой задаче нас интересует вероятность следующего события:

$$B = \{\text{два студента МЭИ окажутся в разных вагонах}\}.$$

Число всех случаев, связанных с опытом остается без изменения: $n = 3^9$. Для подсчета числа случаев, благоприятствующих событию B, воспользуемся сначала процедурой, предложенной в задаче 2.2, а именно, первый студент МЭИ может выбрать вагон тремя способами, а второй — двумя. Таких способов $3 \cdot 2$. Оставшиеся пассажиры могут получить номера своих вагонов 3^7 способами. Поэтому

$$m_B = 3 \cdot 2 \cdot 3^7.$$

Таким образом,

$$\mathbf{P}(B) = \frac{3 \cdot 2 \cdot 3^7}{3^9} = \frac{2}{3}.$$

Ответ. *а*) 2/9; *б*) 2/3.

Задача 2.6. Предположим, что в каждом из трех вагонов есть ровно k мест, и каждый из трех студентов МАИ может занять любое из имеющихся мест. Найти вероятность того, что три студента МАИ окажутся в разных вагонах.

Решение. Определим элементарное событие в рассматриваемом опыте следующим образом:

$$\omega = \left\{ \begin{array}{c} \text{последовательность из номеров мест, образованная} \\ \text{согласно упорядоченному списку студентов МАИ} \end{array} \right\}.$$

Все такие элементарные события равновероятны и образуют полную группу несовместных событий, т. е. опыт сведен к схеме случаев. Для подсчета всех возможных случаев воспользуемся схемой выбора без возвращения. Тогда число n всех случаев, связанных с опытом, равно

$$n = 3k \cdot (3k-1) \cdot (3k-2).$$

Нас по-прежнему интересует вероятность события

$$A = \{\text{три студента МАИ окажутся в разных вагонах}\}.$$

Однако число элементарных событий, благоприятствующих событию A, теперь равно

$$m_A = 3k \cdot 2k \cdot k = 6k^3.$$

В результате получаем

$$\mathbf{P}(A) = \frac{m_A}{n} = \frac{6k^3}{3k \cdot (3k-1) \cdot (3k-2)} = \frac{2k^2}{(3k-1) \cdot (3k-2)}.$$

Заметим, что при неограниченном увеличении числа мест в вагоне, т. е. при $k \longrightarrow \infty$, имеем

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} \mathbf{P}(A) = \lim_{k \longrightarrow \infty} \frac{2}{(3-\frac{1}{k}) \cdot (3-\frac{2}{k})} = \frac{2}{9}.$$

Сравните полученный результат с ответом в *задании а*) задачи 2.5.

Ответ. $\dfrac{2k^2}{(3k-1) \cdot (3k-2)}$.

Задача 2.7. В розыгрыше лотереи участвуют 100 билетов, среди которых 25 выигрышных. Какова вероятность остаться без выигрыша, приобретя 3 билета лотереи?

Решение. Рассмотрим два способа решения этой задачи, отличающиеся определением элементарного события.

Способ I. Определим элементарное событие следующим образом:

$$\omega = \{\text{последовательность из номеров купленных билетов}\}.$$

Все такие элементарные события равновероятны и образуют полную группу несовместных событий, т. е. опыт сведен к схеме случаев. Рассуждая так же, как в задаче 2.2, получим, что число всех случаев

$$n = 100 \cdot 99 \cdot 98.$$

Опишем событие A, вероятность которого нужно найти:

$$A = \{\text{все три билета окажутся без выигрыша}\}.$$

Тогда число случаев, благоприятствующих событию A, выражается следующим образом:

$$m_A = 75 \cdot 74 \cdot 73.$$

В результате имеем

$$\mathbf{P}(A) = \frac{75 \cdot 74 \cdot 73}{100 \cdot 99 \cdot 98}.$$

Способ II. Определим в этой задаче элементарное событие по-другому. Для этого введем следующее понятие: *под совокупностью будем понимать множество элементов, на котором не вводится порядок следования элементов.*

Рассмотрим в качестве элементарного события следующее

$$\omega = \{\text{совокупность из трех лотерейных билетов}\}.$$

Такой способ выбора элементарного события в данной задаче возможен, так как нас не интересует порядок, в котором приобретались лотерейные билеты, а интересует только их качественный состав (количество выигрышных среди них). Все такие элементарные события равновероятны и образуют полную группу несовместных событий, т. е. опыт сведен к схеме случаев.

Поскольку из одной совокупности трех элементов (согласно результату, полученному в задаче 2.3) можно получить 3! последовательностей, то общее число всех элементарных событий, определенных таким способом, будет в 3! раз меньше, чем было получено при использовании первого способа решения задачи, т. е.

$$n = \frac{100 \cdot 99 \cdot 98}{3!}.$$

Полученная величина может быть представлена в следующем виде:

$$n = \frac{100!}{3!\,(100-3)!}\,.$$

Мы получили известную в комбинаторике *формулу для числа сочетаний из* k *элементов по* l:

$$C_k^l = \frac{k!}{l!\,(k-l)!}\,,$$

т. е. для числа всех возможных способов выбрать l элементов из k имеющихся, если порядок выбора несуществен.

Аналогичные рассуждения приводят к нахождению числа случаев, благоприятствующих определенному выше событию A:

$$m_A = C_{75}^3 = \frac{75!}{3!\,(75-3)!}\,.$$

Окончательно получаем

$$\mathbf{P}(A) = \frac{C_{75}^3}{C_{100}^3} = \frac{75\cdot 74\cdot 73}{100\cdot 99\cdot 98}\,.$$

Ответ. C_{75}^3/C_{100}^3.

Задача 2.8. Усложним, по сравнению с предыдущей задачей, правила лотереи. Пусть в лотерее осуществляется розыгрыш 6 номеров из 49. Порядок выпадения выигрышных номеров неважен. Участник лотереи выбирает 6 номеров из 49. Выигрыш выплачивается угадавшим 4, 5 или все 6 номеров. Определить вероятность угадывания ровно четырех выигрышных номеров.

Решение. Определим элементарное событие в данной задаче:

$$\omega = \{\text{совокупность 6 номеров из 49}\}.$$

Все такие элементарные события равновероятны и образуют полную группу несовместных событий, т. е. опыт сведен к схеме случаев. Тогда получим (аналогично тому, как это сделано в предыдущей задаче) количество всех случаев

$$n = C_{49}^6.$$

Опишем событие, вероятность которого требуется найти:

$$A = \{\text{угадано 4 выигрышных номера}\}.$$

После розыгрыша лотереи 49 участвующих в розыгрыше номеров делятся на две группы: 6 номеров — выигрышные и 43 номера — без выигрыша.

Для того чтобы произошло событие A, необходимо и достаточно выбрать 4 номера из 6 выигрышных (это можно сделать C_6^4 способами) и выбрать остальные 2 номера из 43, оставшихся без выигрыша. Таким образом, общее число случаев, благоприятствующих событию A, может быть найдено следующим образом:

$$m_A = C_6^4 \cdot C_{43}^2.$$

Воспользовавшись классической формулой, получим

$$\mathbf{P}(A) = \frac{C_6^4\, C_{43}^2}{C_{49}^6}.$$

Ответ. $\mathbf{P}(A) = C_6^4 C_{43}^2 / C_{49}^6$.

Задача 2.9. Пусть $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B) = 1/2$. Верно ли, что $\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(B|A)$?

Решение. Пользуясь определением условной вероятности, получим

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(B)}, \qquad \mathbf{P}(B|A) = \frac{\mathbf{P}(BA)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(A)}.$$

Поскольку в данном случае совпадают и числители, и знаменатели, то $\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(B|A)$.

Ответ. Верно.

Задача 2.10. Пусть H_1, H_2, H_3, H_4 — равновероятные гипотезы. Являются ли гипотезами события $H_1 + H_2$ и $H_3 + H_4$?

Решение. Необходимо проверить, выполняются ли для событий $H_1 + H_2$ и $H_3 + H_4$ свойства, которым должны удовлетворять гипотезы. Проверим попарную несовместность этих событий:

$$(H_1 + H_2)(H_3 + H_4) = H_1H_3 + H_1H_4 + H_2H_3 + H_2H_4 = \varnothing,$$

так как H_1, H_2, H_3, H_4 — гипотезы, и поэтому они несовместны. Проверим, образуют ли эти события полную группу:

$$(H_1 + H_2) + (H_3 + H_4) = H_1 + H_2 + H_3 + H_4 = \Omega.$$

Таким образом, $(H_1 + H_2)$ и $(H_3 + H_4)$ образуют полную группу несовместных событий и $\mathbf{P}(H_1 + H_2) \geqslant \mathbf{P}(H_1) > 0$, $\mathbf{P}(H_3 + H_4) \geqslant \mathbf{P}(H_3) > 0$. Следовательно, эти события являются гипотезами.

Ответ. Да, являются.

Задача 2.11. Пусть $\mathbf{P}(B) > 0$. Доказать, что $\mathbf{P}(\overline{A}|B) = 1 - \mathbf{P}(A|B)$.

Решение. По свойствам событий 2) A, 12) A, 10) A и аксиоме **А3**:

$$1=\frac{\mathbf{P}(B)}{\mathbf{P}(B)}=\frac{\mathbf{P}(\Omega B)}{\mathbf{P}(B)}=\frac{\mathbf{P}((\overline{A}+A)B)}{\mathbf{P}(B)}=\frac{\mathbf{P}(\overline{A}B+AB)}{\mathbf{P}(B)}=\mathbf{P}(\overline{A}|B)+\mathbf{P}(A|B).$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}(\overline{A}|B)=1-\mathbf{P}(A|B).$$

Что и требовалось доказать.

§ 3. Основные формулы вычисления вероятностей

3.1. Формула умножения вероятностей. Основной задачей теории вероятностей является вычисление вероятностей сложных событий с использованием вероятностей более простых событий.

Теорема 3.1. *Вероятность одновременного появления событий $A_1, \ldots, A_n$ выражается **формулой умножения вероятностей**:*

$$\mathbf{P}(A_1A_2\cdot\ldots\cdot A_n)=\mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2|A_1)\cdot\ldots\cdot\mathbf{P}(A_n|A_1\cdot\ldots\cdot A_{n-1}),$$

в которой вероятность каждого следующего по порядку события вычисляется при условии, что в рассматриваемом опыте произошли все предыдущие события.

Доказательство. Проведем доказательство по индукции. Если $n=2$, то утверждение верно по определению условной вероятности. Предположим, что формула справедлива для любых $n\leqslant k$. Тогда, рассматривая произведение $k+1$ события, получаем

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A_1A_2\cdot\ldots\cdot A_kA_{k+1})&=\mathbf{P}((A_1A_2\cdot\ldots\cdot A_k)A_{k+1})=\\&=\mathbf{P}(A_1A_2\cdot\ldots\cdot A_k)\mathbf{P}(A_{k+1}|A_1A_2\cdot\ldots\cdot A_k)=\mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2|A_1)\times\ldots\\&\qquad\ldots\times\mathbf{P}(A_k|A_1A_2\cdot\ldots\cdot A_{k-1})\mathbf{P}(A_{k+1}|A_1A_2\cdot\ldots\cdot A_k).\end{aligned}$$

Таким образом, формула оказывается верной и для $k+1$ сомножителя. По индукции заключаем, что формула умножения вероятности верна.

Определение 3.1. События A и B называются *независимыми*, если $\mathbf{P}(AB)=\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$. В противном случае события называются зависимыми.

Определение 3.2. Если любые два события из $A_1, \ldots, A_n$ независимы, то события $A_1, \ldots, A_n$ называются *попарно независимыми*. События $A_1, \ldots, A_n$ называются *независимыми в совокупности*, или просто *независимыми*, если для любых $k = \overline{1,n}$ и $1 \leqslant i_1 < \ldots \ldots < i_k \leqslant n$ верно равенство

$$\mathbf{P}(A_{i_1} \cdot \ldots \cdot A_{i_k}) = \mathbf{P}(A_{i_1}) \cdot \ldots \cdot \mathbf{P}(A_{i_k}).$$

Независимость событий не следует из их попарной независимости, но обратное утверждение верно.

Пример 3.1. Пусть имеется тетраэдр, у которого первая грань выкрашена в красный цвет, вторая — в синий, третия — в желтый, а четвертая грань выкрашена частями в красный, синий и желтый. Пусть случаи $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ состоят в выпадении в опыте G одной из граней. Событие A состоит в появлении грани красного цвета, событие B — синего, и событие C — желтого цвета. Тогда $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(\omega_1 + \omega_4) = 1/2$. Аналогично, $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(C) = 1/2$. Далее, $\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(\omega_4) = 1/4$. В то же время $\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) = 1/4$, т.е. $\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$. Это значит, что события A и B независимы. Аналогично устанавливается, что события A и C, а также события B и C независимы. Таким образом, события A, B, C являются попарно независимыми. Однако эти события не являются независимыми в совокупности. Действительно,

$$\mathbf{P}(ABC) = \mathbf{P}(\omega_4) = 1/4,$$

но

$$\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C) = 1/8.$$

Пример 3.2. Если события A и B независимы, то независимы также события A и $\overline{B}$, $\overline{A}$ и $\overline{B}$, $\overline{A}$ и B. Для событий A и $\overline{B}$ имеем

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A\Omega) = \mathbf{P}(A(B + \overline{B})) = \mathbf{P}(AB + A\overline{B}) = \mathbf{P}(AB) + \mathbf{P}(A\overline{B}).$$

Поэтому $\mathbf{P}(A\overline{B}) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(AB)$. Так как A и B независимы, то

$$\mathbf{P}(A\overline{B}) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(\overline{B}),$$

т.е., согласно определению 3.1, события A и $\overline{B}$ независимы. Независимость остальных событий доказывается аналогично. Утверждение справедливо и для произвольного количества независимых событий.

Пример 3.3. Если несовместные события A и B имеют ненулевые вероятности, то они зависимы. Действительно, по условию $AB = \varnothing$. Если бы A и B были независимыми, тогда было бы верно

$$\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(\varnothing) = 0,$$

но левая часть равенства по условию нулю не равна. Следовательно, A и B зависимы.

3.2. Формула сложения вероятностей.

Теорема 3.2. *Вероятность появления в опыте хотя бы одного из событий* $A_1, \ldots, A_n$ *выражается* ***формулой сложения вероятностей***:

$$\mathbf{P}(A_1 + \ldots + A_n) = p_1 - p_2 + \ldots + (-1)^{n-1} p_n = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} p_i,$$

где $p_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i)$, $p_2 = \sum\limits_{i=1}^{n-1} \sum\limits_{j=i+1}^{n} \mathbf{P}(A_i A_j), \ldots,$ $p_n = \mathbf{P}(A_1 \cdot \ldots \cdot A_n)$.

Данная формула доказывается по индукции на основе свойства 6)Р, из которого следует формула сложения вероятностей для $n = 2$. При $n = 3$ эта формула принимает вид

$$\mathbf{P}(A_1 + A_2 + A_3) = \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) + \mathbf{P}(A_3) - \\ - \mathbf{P}(A_1 A_2) - \mathbf{P}(A_2 A_3) - \mathbf{P}(A_1 A_3) + \mathbf{P}(A_1 A_2 A_3).$$

Если события $A_1, \ldots, A_n$ попарно несовместны, то вероятность произведения любой комбинации из этих событий равняется нулю и формула сложения вероятностей принимает вид (см. свойство 8)Р)

$$\mathbf{P}\Big(\sum_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i).$$

Если события A_i в бесконечной последовательности $A_1, \ldots$ $\ldots, A_i, \ldots$ попарно несовместны, то выполняется следующее равенство:

$$\mathbf{P}\Big(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i).$$

Действительно, пусть $A \triangleq \sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i$. Представим событие A в виде

$$A \triangleq \sum_{i=1}^{n} A_i + B_n, \quad \text{где} \quad B_n \triangleq \sum_{i=n+1}^{\infty} A_i.$$

Тогда $\mathbf{P}(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i) + \mathbf{P}(B_n)$. Так как по построению $B_1 \supset$ $\supset B_2 \supset \ldots \supset B_n \supset \ldots$ и $\prod\limits_{n=1}^{\infty} B_n = \varnothing$, то по аксиоме **А4** получаем $\mathbf{P}(B_n) \to 0$ при $n \to \infty$. Откуда и вытекает требуемое равенство, которое называется *свойством счетной аддитивности вероятности.*

Можно доказать и обратное утверждение, что при выполнении этого свойства выполняются также аксиомы **А3**, **А4**.

Предположим, что события $A_1, \ldots, A_n$ совместны и независимы. Тогда

$$\mathbf{P}\Big(\sum_{i=1}^{n} A_i\Big) = 1 - \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}(\overline{A}_i).$$

Действительно, пусть $n = 2$. По свойству 11)Р имеем $\mathbf{P}(A+B) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A} \cdot \overline{B})$. Так как A и B независимы, а значит $\overline{A}$ и $\overline{B}$ независимы также, то $\mathbf{P}(A+B) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A})\mathbf{P}(\overline{B})$. Общая формула доказывается по методу математической индукции.

3.3. Формула полной вероятности.

Теорема 3.3. *Пусть с опытом G связаны гипотезы $H_1, \ldots, H_n$. Тогда вероятность появления произвольного события A в опыте G выражается* ***формулой полной вероятности***:

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(H_i)\mathbf{P}(A|H_i),$$

где $\mathbf{P}(H_i)$ — вероятность гипотезы, $\mathbf{P}(A|H_i)$ — условная вероятность события A при условии, что справедлива гипотеза H_i, $i = \overline{1,n}$.

Доказательство. Теорема доказывается следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A) &= \mathbf{P}(A\Omega) = \mathbf{P}(A(H_1 + \ldots + H_n)) = \mathbf{P}(AH_1 + \ldots + AH_n) = \\ &= \mathbf{P}(AH_1) + \ldots + \mathbf{P}(AH_n) = \mathbf{P}(H_1)\mathbf{P}(A|H_1) + \ldots + \mathbf{P}(H_n)\mathbf{P}(A|H_n).\end{aligned}$$

Замечание 3.1. Формула полной вероятности позволяет выразить вероятность сложного события A через вероятности составляющих его более простых событий AH_i, $i = \overline{1,n}$. Данная формула используется в опытах, не сводящихся к схеме случаев.

3.4. Формула Байеса.

Теорема 3.4. *Пусть с опытом G связаны гипотезы $H_1, \ldots, H_n$. Предположим, что при проведении опыта произошло событие A, вероятность которого была $\mathbf{P}(A) > 0$. Пусть до опыта G были известны лишь* ***априорные*** *вероятности гипотез $\mathbf{P}(H_i)$, $i = \overline{1,n}$, и соответствующие им условные вероятности $\mathbf{P}(A|H_i)$, $i = \overline{1,n}$, события A. В этом случае условная* (***апостериорная***) *вероятность* $\mathbf{P}(H_i|A)$ *гипотезы* H_i *при условии, что событие* A *произошло, вычисляется по* ***формуле Байеса***:

$$\mathbf{P}(H_i|A) = \frac{\mathbf{P}(H_i)\mathbf{P}(A|H_i)}{\sum\limits_{k=1}^{n}\mathbf{P}(H_k)\mathbf{P}(A|H_k)}.$$

Доказательство. Данная формула вытекает из свойств условной вероятности. Действительно, по свойству 17)P имеем $\mathbf{P}(H_i)\mathbf{P}(A|H_i) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(H_i|A)$, откуда следует, что

$$\mathbf{P}(H_i|A) = \frac{\mathbf{P}(H_i)\mathbf{P}(A|H_i)}{\mathbf{P}(A)}.$$

Далее остается заменить $\mathbf{P}(A)$ формулой полной вероятности.

Замечание 3.2. Формула Байеса предназначена для вычисления апостериорных вероятностей гипотез после проведения опыта с учетом полученной информации (событие A уже произошло).

3.5. Формула Бернулли. Рассмотрим последовательность из n независимых испытаний (опытов) с двумя исходами (событиями) A и $\overline{A}$, которые называются соответственно «*успехом*» и «*неуспехом*», причем $\mathbf{P}(A) = p \in (0,1)$, $\mathbf{P}(\overline{A}) = q \triangleq 1 - p$. Построенная схема испытаний называется *схемой Бернулли*, а сам опыт — *опытом Бернулли*.

Теорема 3.5. *Пусть опыт* G *производится по схеме Бернулли. Тогда вероятность* $P_n(m)$ *события* $A_n(m)$, *состоящего в том, что при* n *повторениях опыта* G *событие* A *произойдет ровно* m *раз, вычисляется по* ***формуле Бернулли***:

$$P_n(m) \triangleq \mathbf{P}(A_n(m)) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}.$$

Продемонстрируем справедливость этой формулы для $n = 3$ и $m = 1$. В этом случае

$$P_3(1) \triangleq \mathbf{P}(A_3(1)) = C_3^1 p^1 (1-p)^2 = 3p(1-p)^2.$$

Представим событие $A_3(1)$ в виде суммы несовместных событий:

$$A_3(1) = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2 A_3,$$

где события A_i и $\overline{A}_i$ состоят в том, что в i-м опыте, $i = 1, 2, 3$, наблюдается или не наблюдается «успех». Поэтому получаем

$$P_3(1) \triangleq \mathbf{P}(A_3(1)) = \mathbf{P}(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3) + \mathbf{P}(\overline{A}_1 A_2\overline{A}_3) + \mathbf{P}(\overline{A}_1\overline{A}_2 A_3).$$

Так как события A_1, A_2, A_3, а также $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \overline{A}_3$ независимы, то

$$P_3(1) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(\overline{A}_2)\mathbf{P}(\overline{A}_3) + \mathbf{P}(\overline{A}_1)\mathbf{P}(A_2)\mathbf{P}(\overline{A}_3) + \mathbf{P}(\overline{A}_1)\mathbf{P}(\overline{A}_2)\mathbf{P}(A_3).$$

Поэтому $P_3(1) = 3p(1-p)^2 = C_3^1 p(1-p)^2$. В общем случае формула Бернулли доказывается аналогично.

Пример 3.4. Монету подбрасывают 5 раз. Найти вероятность того, что «герб» выпадет ровно три раза. В этом случае $n = 5$, $m = 3$, $p = 1/2$, $q \triangleq 1 - p = 1/2$. Тогда по формуле Бернулли

$$P_5(3) = C_5^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{16}.$$

3.6. Типовые задачи.

Задача 3.1. Из колоды карт (52 карты) наугад вынимается одна. Являются ли зависимыми события

$$A = \{\text{эта карта — туз}\} \text{ и } B = \{\text{эта карта имеет пиковую масть}\}\,?$$

Решение. По определению операции произведения событий

$$AB = \{\text{эта карта — туз пик}\}.$$

Следовательно, по классической формуле теории вероятностей

$$\mathbf{P}(AB) = \frac{1}{52}, \quad \mathbf{P}(A) = \frac{4}{52}, \quad \mathbf{P}(B) = \frac{13}{52}.$$

Так как выполняется равенство

$$\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B),$$

то события A и B независимы.

Ответ. События A и B независимы.

Задача 3.2. Пусть $\mathbf{P}(C) = 1/2$. Сравнить вероятности

$$\mathbf{P}(A + B|C) \text{ и } \mathbf{P}(A|C) + \mathbf{P}(B|C).$$

Решение. Пользуясь определением условной вероятности и формулой сложения вероятностей, получаем

$$\mathbf{P}(A + B|C) = \frac{\mathbf{P}((A+B)C)}{\mathbf{P}(C)} = \frac{\mathbf{P}(AC + BC)}{\mathbf{P}(C)} =$$
$$= \frac{\mathbf{P}(AC) + \mathbf{P}(BC) - \mathbf{P}(ABC)}{\mathbf{P}(C)} = \mathbf{P}(A|C) + \mathbf{P}(B|C) - \mathbf{P}(AB|C).$$

Но поскольку вероятность $\mathbf{P}(AB|C)$ неотрицательна, то

$$\mathbf{P}(A+B|C) \leqslant \mathbf{P}(A|C) + \mathbf{P}(B|C).$$

Ответ. $\mathbf{P}(A+B|C) \leqslant \mathbf{P}(A|C) + \mathbf{P}(B|C)$.

Задача 3.3. Пусть $\mathbf{P}(A) = 1/7$, $\mathbf{P}(B) = 4/21$. Верно ли, что $\mathbf{P}(A+B) \leqslant 1/3$. Ответ обосновать.

Решение. Согласно формуле сложения вероятностей имеем

$$\mathbf{P}(A+B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(AB) \leqslant \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) = \frac{1}{7} + \frac{4}{21} = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}.$$

Ответ. Верно.

Задача 3.4. Пусть H_1, H_2, H_3 — равновероятные гипотезы. Произошло событие $A = H_2 + H_3$. Образуют ли систему гипотез события $H_1 + H_2$ и H_3? Если да, то найдите их апостериорные вероятности.

Решение. Необходимо проверить, выполняются ли для событий $H_1 + H_2$ и H_3 свойства, которым должны удовлетворять гипотезы.

Проверим попарную несовместность этих событий:

$$(H_1 + H_2)H_3 = H_1H_3 + H_2H_3 = \varnothing,$$

так как H_1, H_2, H_3 — гипотезы, и поэтому они несовместны.

Проверим, образуют ли эти события полную группу:

$$(H_1 + H_2) + H_3 = H_1 + H_2 + H_3 = \Omega.$$

Таким образом, $(H_1 + H_2)$ и H_3 образуют полную группу несовместных событий и $\mathbf{P}(H_1 + H_2) \geqslant \mathbf{P}(H_1) > 0$, $\mathbf{P}(H_3) > 0$. Следовательно, эти события являются гипотезами.

Апостериорными вероятностями этих гипотез являются $\mathbf{P}(H_1 + H_2|A)$ и $\mathbf{P}(H_3|A)$. Найдем эти условные вероятности.

$$\mathbf{P}(H_1 + H_2|A) = \frac{\mathbf{P}((H_1 + H_2)A)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{\mathbf{P}((H_1 + H_2)(H_2 + H_3))}{\mathbf{P}(H_2 + H_3)} = \frac{\mathbf{P}(H_2)}{\mathbf{P}(H_2 + H_3)}.$$

Аналогично получим

$$\mathbf{P}(H_3|A) = \frac{\mathbf{P}(H_3)}{\mathbf{P}(H_2 + H_3)}.$$

В силу равновероятности гипотез H_1, H_2, H_3

$$\mathbf{P}(H_1) = \mathbf{P}(H_2) = \mathbf{P}(H_3) = \frac{1}{3},$$
$$\mathbf{P}(H_2 + H_3) = \mathbf{P}(H_2) + \mathbf{P}(H_3) = \frac{2}{3}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}(H_1 + H_2|A) = \mathbf{P}(H_3|A) = \frac{1/3}{2/3} = 0{,}5.$$

О т в е т. События $H_1 + H_2$ и H_3 образуют систему гипотез, апостериорные вероятности этих гипотез равны $\mathbf{P}(H_1 + H_2|A) = \mathbf{P}(H_3|A) = 0{,}5$.

З а д а ч а 3.5. Система состоит из двух элементов с надежностями p_1 и p_2 соответственно. Элементы соединены параллельно и выходят из строя независимо друг от друга. Система работает. Найти вероятность того, что неисправен первый элемент.

Р е ш е н и е. Рассмотрим следующие случайные события:
$A = \{$первый элемент работает нормально$\}$,
$B = \{$второй элемент работает нормально$\}$,
$C = \{$система работает$\}$.

Согласно условию задачи $\mathbf{P}(A) = p_1$, $\mathbf{P}(B) = p_2$. Используя свойство противоположного события 11)P и формулу умножения вероятностей, получим вероятность события C:

$$\mathbf{P}(C) = 1 - \mathbf{P}(\overline{C}) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A} \cdot \overline{B}) = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2).$$

Требуется найти $\mathbf{P}(\overline{A}|C)$. Согласно определению условной вероятности случайного события

$$\mathbf{P}(\overline{A}|C) = \frac{\mathbf{P}(\overline{A}C)}{\mathbf{P}(C)} = \frac{(1 - p_1)p_2}{1 - (1 - p_1)(1 - p_2)}.$$

О т в е т. Искомая вероятность равна $\dfrac{(1 - p_1)p_2}{1 - (1 - p_1)(1 - p_2)}$.

З а д а ч а 3.6. Некто нашел чужую пластиковую карточку банкомата. Найти вероятность того, что двух попыток, предоставляемых банкоматом, хватит для того, чтобы отгадать неизвестный ему четырехзначный код.

Р е ш е н и е. Рассмотрим событие

$A = \{$двух предоставленных попыток хватит, чтобы угадать код$\}$.

Это событие может быть представлено следующим образом:

$$A = A_1 + \overline{A}_1 A_2,$$

где $A_i = \{$код впервые угадан с i-й попытки$\}, i = 1, 2$. События A_1 и $\overline{A}_1$ — несовместны по определению противоположных событий, поскольку соответствующие множества благоприятных элементарных событий не пересекаются. Множество элементарных событий, благоприятствующих событию $\overline{A}_1 A_2$, состоит из элементарных событий, одновременно благоприятствующих событиям $\overline{A}_1$ и A_2. Следовательно, это множество не пересекается с множеством элементарных событий, благоприятствующих событию A_1. Таким образом, события A_1 и $\overline{A}_1 A_2$ несовместны.

Для нахождения $\mathbf{P}(A)$ воспользуемся формулой сложения вероятностей для несовместных событий:

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(\overline{A}_1 A_2).$$

Вероятность события A_1 находим, используя схему выбора с возвращением (см. задачу 2.4):

$$\mathbf{P}(A_1) = \frac{1}{10^4}.$$

По формуле умножения вероятностей

$$\mathbf{P}(\overline{A}_1 A_2) = \mathbf{P}(\overline{A}_1)\mathbf{P}(A_2|\overline{A}_1),$$

где $\quad \mathbf{P}(\overline{A}_1) = 1 - \mathbf{P}(A_1) = 1 - \dfrac{1}{10^4}, \quad \mathbf{P}(A_2|\overline{A}_1) = \dfrac{1}{10^4 - 1}.$

Число $n = 10^4 - 1$ есть количество всевозможных четырехзначных кодов, за исключением одного, проверенного при первой попытке. Таким образом,

$$\mathbf{P}(A) = \frac{1}{10^4} + \left(1 - \frac{1}{10^4}\right) \frac{1}{10^4 - 1} = \frac{2}{10^4}.$$

Ответ. $\mathbf{P}(A) = 2/10^4$.

Задача 3.7. Средний процент невозвращения в срок кредита, выдаваемого банком, составляет 5%. Найти вероятность того, что при выдаче банком 100 кредитов проблемы с возвратом денег возникнут не менее, чем в двух случаях.

Решение. Воспользуемся схемой Бернулли. Под опытом понимается получение кредита, который был выдан банком. В каждом опыте событие

$$A = \{\text{кредит не возвращается в срок}\}$$

происходит с вероятностью $p = 0{,}05$. Назовем наступление события A «*успехом*». Указанный опыт проводится $n = 100$ раз в одних и тех же условиях. Требуется определить вероятность события

$$B = \{\text{кредит не будет возвращен в срок хотя бы в двух случаях}\}.$$

В этой задаче

$$\overline{B} = \{\text{кредит не будет возвращен в срок менее, чем в двух случаях}\}.$$

Событие $\overline{B}$ может быть представлено в виде следующей суммы событий:

$$\overline{B} = A_{100}(0) + A_{100}(1),$$

где $$A_{100}(m) = \left\{\begin{matrix}\text{ровно в } m \text{ случаях из 100 кредит} \\ \text{не будет возвращен в срок}\end{matrix}\right\}, \quad m = \overline{0,\,1}.$$

События $A_{100}(0)$ и $A_{100}(1)$ несовместны. Воспользуемся формулой сложения вероятностей

$$\mathbf{P}(\overline{B}) = \mathbf{P}(A_{100}(0)) + \mathbf{P}(A_{100}(1)),$$

где вероятности событий $A_{100}(0)$ и $A_{100}(1)$ вычисляются по формуле Бернулли

$$\mathbf{P}(A_{100}(m)) = C_{100}^{m}(0{,}05)^{m}(0{,}95)^{100-m}, \quad m = \overline{0,\,1}. \tag{3.1}$$

Таким образом,

$$\mathbf{P}(\overline{B}) = C_{100}^{0}(0{,}05)^{0}(0{,}95)^{100} + C_{100}^{1}(0{,}05)^{1}(0{,}95)^{99} = (0{,}95)^{100} + 5\cdot(0{,}95)^{99}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}(B) = 1 - \mathbf{P}(\overline{B}) = 1 - (0{,}95)^{100} - 5\cdot(0{,}95)^{99} \approx 0{,}96.$$

Ответ. $\mathbf{P}(B) \approx 0{,}96$.

Задача 3.8. В торговую фирму поступили телевизоры от трех фирм изготовителей в соотношении 2:5:3. Телевизоры, поступающие от первой фирмы, требуют ремонта в течение гарантийного срока в 15% случаев, от второй и третьей — соответственно в 8% и 6% случаев. Найти вероятность того, что поступивший в торговую фирму телевизор потребует ремонта в течение гарантийного срока.

Решение. В опыте, рассматриваемом в задаче, можно выделить два этапа. На первом этапе осуществляется продажа торговой фирмой телевизора, изготовленного в одной из трех фирм, упомянутых в условии задачи. Второй этап представляет собой эксплуатацию телевизора, в результате чего он либо ломается в течение гарантийного срока, либо нет.

Построим систему гипотез как возможных исходов первого этапа опыта:

$$H_i = \{\text{проданный телевизор был произведен } i\text{-й фирмой}\},\ i = \overline{1,\,3}.$$

Очевидно, что построенная система событий удовлетворяет требованиям, предъявляемым к гипотезам, так как эти события являются несовместными (телевизор не может быть изготовлен двумя фирмами одновременно), и никакие другие исходы первого этапа опыта невозможны (так как в продажу поступили телевизоры только указанных фирм).

Определим событие, вероятность которого требуется найти:

$$A = \{\text{проданный телевизор потребует гарантийного ремонта}\}.$$

Согласно условию задачи телевизоры поступили в продажу от трех фирм в пропорции 2:5:3. Обозначим через x количество телевизоров, приходящихся на одну долю в указанной пропорции. Тогда общее количество телевизоров, поступивших в продажу:

$$2x + 5x + 3x = 10x.$$

При этом количество телевизоров, поступивших от первой фирмы равно $2x$, следовательно, согласно классической формуле вычисления вероятностей:

$$\mathbf{P}(H_1) = \frac{2x}{10x} = \frac{1}{5}.$$

Аналогично найдем вероятности остальных гипотез:

$$\mathbf{P}(H_2) = \frac{1}{2}, \qquad \mathbf{P}(H_3) = \frac{3}{10}.$$

Условные вероятности события A относительно каждой из гипотез заданы в условии задачи:

$$\mathbf{P}(A|H_1) = 0{,}15, \qquad \mathbf{P}(A|H_2) = 0{,}08, \qquad \mathbf{P}(A|H_3) = 0{,}06.$$

Воспользовавшись формулой полной вероятности, получаем

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{P}(H_i)\mathbf{P}(A|H_i) = \frac{1}{5} \cdot 0{,}15 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}08 + \frac{3}{10} \cdot 0{,}06 = 0{,}088.$$

Ответ. $\mathbf{P}(A) = 0{,}088$.

Задача 3.9. После осмотра больного врач считает, что равновозможно одно из двух заболеваний C или D. Для уточнения диагноза больного направляют на анализ, исход которого дает положительную реакцию при заболевании C в 30 процентах случаев, а при заболевании D — в 20 процентах случаев. Анализ дал положительную реакцию. Какое заболевание становится более вероятным?

Р е ш е н и е. В данной задаче опыт, так же, как и в предыдущей задаче, может быть разбит на два этапа. На первом этапе врач ставит диагноз. Систему гипотез можно сформулировать следующим образом:

$$H_1 = \{\text{пациент имеет заболевание C}\},$$
$$H_2 = \{\text{пациент имеет заболевание D}\}.$$

Для ответа на поставленный в задаче вопрос нужно найти апостериорные вероятности гипотез. Априорные вероятности гипотез, согласно условию задачи, равны:

$$\mathbf{P}(H_1) = 0{,}5, \quad \mathbf{P}(H_2) = 0{,}5.$$

Рассмотрим событие

$$A = \{\text{анализ дал положительную реакцию}\}.$$

Для нахождения апостериорных вероятностей гипотез, т. е. $\mathbf{P}(H_1|A)$ и $\mathbf{P}(H_2|A)$, воспользуемся формулой Байеса. Для того чтобы воспользоваться формулой Байеса, необходимо найти условные вероятности события A относительно каждой из гипотез. Согласно условию задачи они равны соответственно:

$$\mathbf{P}(A|H_1) = 0{,}3, \qquad \mathbf{P}(A|H_2) = 0{,}2.$$

Воспользуемся формулой Байеса:

$$\mathbf{P}(H_1|A) = \frac{\mathbf{P}(H_1)\mathbf{P}(A|H_1)}{\sum\limits_{i=1}^{2} \mathbf{P}(H_i)\mathbf{P}(A|H_i)} = \frac{0{,}15}{0{,}25} = 0{,}6,$$

$$\mathbf{P}(H_2|A) = \frac{\mathbf{P}(H_2)\mathbf{P}(A|H_2)}{\sum\limits_{i=1}^{4} \mathbf{P}(H_i)\mathbf{P}(A|H_i)} = \frac{0{,}1}{0{,}25} = 0{,}4.$$

Так как $\mathbf{P}(H_1|A) > \mathbf{P}(H_2|A)$, то заболевание C становится более вероятным.

О т в е т. Более вероятно заболевание C.

§ 4. Задачи для самостоятельного решения

1. Пончик отправился в путешествие на воздушном шаре. Через каждые 10 минут полета у Пончика возникает желание подкрепиться, и он начинает в случайном порядке просматривать свои карманы до тех пор, пока не найдет съестное. Найти вероятность того, что:

а) поиск k-го пряника начнется с пустого кармана, если у Пончика 17 карманов, в которых изначально лежало по одному прянику;

б) Пончик первые два раза будет подкрепляться пряниками, если в двух из имеющихся у него 17 карманов лежит по одному прянику, а в 15 — по одной конфете;

в) Пончик первые два раза будет подкрепляться пряниками, если у него 10 карманов, в одном из которых — два пряника, а в остальных — по две конфеты.

2. Владелец пластиковой карточки банкомата забыл последние три цифры кода и набрал их наугад. Какова вероятность набора верного номера, если известно, что все эти три цифры различны?

3. Из десяти вариантов контрольной работы, написанных на отдельных карточках, наугад выбирают восемь и раздают восьми студентам, сидящим в одном ряду. Найти вероятность следующих событий:

$A = \{$варианты 1 и 2 останутся неиспользованными$\}$,

$B = \{$варианты 1 и 2 достанутся рядом сидящим студентам$\}$,

$C = \{$будут распределены последовательные номера вариантов$\}$.

4. Полная колода карт (52 листа) делится наугад на две равные части по 26 карт. Найти вероятность следующих событий:

$A = \{$в каждой пачке по два туза$\}$,

$B = \{$все тузы в одной пачке$\}$,

$C = \{$в одной пачке будет один туз, а в другой — три$\}$.

5. В предположении, что день рождения любого человека равновероятен в любой день года, найти вероятность того, что все люди в компании из r человек родились в различные дни. Подсчитать эту вероятность для $r = 23$.

6. Из шести букв разрезной азбуки составлено слово АНАНАС. Ребенок, не умеющий читать, рассыпал эти буквы и затем собрал в произвольном порядке. Найти вероятность того, что у него снова получится слово АНАНАС?

7. Компания занимается организацией отдыха для любителей рыбной ловли. На озере, где находится туристическая база компании, оборудовано для рыбной ловли 30 мест. Набрана группа из 5 отдыхающих, которым, независимо друг от друга, предоставлено право выбора места рыбной ловли. В предположении, что все места одинаково привлекательны для любого отдыхающего, вычислить вероятность того, что все отдыхающие выберут различные места.

8. Из цифр 1, 2, 3 наугад составляется шестизначное число. Найти вероятность того, что в этом числе цифра 1 будет встречаться один раз, цифра 2 — два раза, цифра 3 — три раза.

9. В условиях предыдущей задачи найти вероятность того, что получится четное число, содержащее всего одну цифру 2.

10. Рассмотрим карточную игру, когда колода из 32 карт (без шестерок) раздается трем игрокам, получающим по 10 карт, а 2 карты откладываются в сторону. Какова вероятность того, что отложенные в сторону карты окажутся тузами.

11. В гостинице имеется шесть одноместных номеров. На эти номера имеется 10 претендентов: 6 мужчин и 4 женщины. Гостиница следует правилу FIFO: пришедшие раньше облуживаются раньше. Все претенденты пребывают в гостиницу в случайном порядке. Какова вероятность того, что номера получат:

а) все шесть претендентов мужского пола;

б) четверо мужчин и две женщины;

в) по крайней мере одна из четырех женщин.

12*. *Парадокс де Мере.* Подбрасывают три игральные кости и подсчитывают сумму выпавших очков. Де Мере заметил, что появление одиннадцати очков возможно при шести комбинациях (6-4-1, 6-3-2, 5-5-1, 5-4-2, 5-3-3, 4-4-3) и появление двенадцати очков возможно при шести комбинациях (6-5-1, 6-4-2, 6-3-3, 5-5-2, 5-4-3, 4-4-4). Объяснить парадоксальность ситуации, которая состоит в том, что вероятности появления в сумме 11 и 12 очков не равны.

13. Восемнадцать команд, участвующих в турнире, по жребию разбиваются на две подгруппы по девять команд в каждой. Найти вероятность того, что

а) все шесть лидирующих команд окажутся в одной подгруппе;

б) шесть лидирующих команд распределятся по три в разные группы.

14. При проведении фуршета на стол поставили пять бокалов шампанского, три бокала белого вина и два бокала красного вина. К столу подошли семь человек и взяли по одному бокалу. Найти вероятность того, что на столе осталось по одному бокалу каждого напитка. (Будем предполагать, что для каждого из гостей все напитки одинаково привлекательны).

15. Каждый из 50 штатов представлен в сенате США двумя сенаторами. Предстоит выбрать некоторый комитет из 50 сенаторов. Найти вероятности следующих событий:

а) штат Айова будет представлен в комитете;

б) все штаты будут представлены в комитете.

(Будем предполагать, что все сенаторы имеют равные шансы быть избранными в этот комитет).

16*. В городе проживает $n+1$ человек. Один из них, узнав новость, сообщает ее другому, тот — третьему и т. д., причем каждый человек передает новость наугад выбранному жителю города, за исключением того, от кого он ее услышал. Найти вероятность того, что новость будет передана r раз без возвращения к человеку, который узнал ее первым.

17. Для рекламы своей продукции производитель решил снабдить специальными купонами 10 000 изделий из произведенных 500 000 изделий. Покупатель, отославший в адрес компании 3 купона, получает 1 дополнительный экземпляр продукции, 4 купона — 2 дополнительных экземпляра, более четырех купонов — 3 дополнительных экземпляра. Покупатель одновременно приобрел пять экземпляров продукции компании и решил участвовать в предложенной рекламной акции. Найти вероятность того, что он получит дополнительно не менее двух экземпляров продукции.

18. При формировании группы для проведения специального социологического опроса необходимо отобрать 10 человек, удовлетворяющих определенным требованиям. Вероятность того, что наугад выбранный человек удовлетворяет этим требованиям, равна 0,2. Найти вероятность того, что при отборе придется тестировать ровно 20 человек.

19. Игральная кость подброшена дважды. Зависимы ли случайные события $A = \{$число очков при первом бросании равно 5$\}$ и $B = \{$сумма очков при двух бросаниях равна 9$\}$? Ответ обосновать.

20. Пусть $\mathbf{P}(A) = 1/2$, $\mathbf{P}(B) = 1/3$. Верно ли, что $\mathbf{P}(AB) \leqslant 3/8$? Ответ обосновать.

21. События A и B независимы, $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B) = 1/4$. Найти $\mathbf{P}(A + \overline{B})$.

22. Вакансия, предлагаемая безработному биржей труда, удовлетворяет его с вероятностью 0,01. Сколько нужно обслужить безработных, чтобы вероятность того, что хотя бы один из них найдет работу, была бы не ниже 0,95?

23. Из 25 вопросов, включенных в программу экзамена, студент подготовил 20. На экзамене студент наугад выбирает 5 вопросов из 25.

Для сдачи экзамена достаточно ответить правильно хотя бы на 3 вопроса. Найти вероятность того, что студент сдаст экзамен.

24. Некоторая система состоит из шести элементов, отказы которых независимы (рис. 4.1). Вероятности безотказной работы (надежности) элементов равны соответственно

$$p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = 1/2,$$
$$p_1 = 2/3,\ p_6 = 3/4.$$

Найти вероятность отказа ровно двух элементов в параллельном соединении при условии, что система работает нормально.

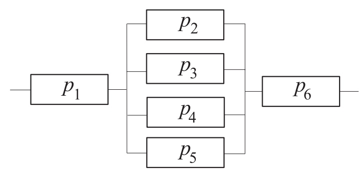


Рис. 4.1

25. Отдел надзора отделения центрального банка курирует деятельность ряда коммерческих банков. При сдаче квартальной отчетности серьезные финансовые нарушения обнаруживаются в среднем у 5% банков. На проверку выбрано три банка. Найти наиболее вероятное число банков с серьезными нарушениями финансовой отчетности среди выбранных.

26. Вероятность рождения мальчика равна 0,515. На семейном совете постановили, что дети в семье будут рождаться до появления второго мальчика. Найти вероятность того, что в семье будет четверо детей.

27. Отдел технического контроля предприятия бракует каждую партию из 100 деталей, если из 5 деталей, наугад выбранных из партии, хотя бы одна окажется бракованной. Партия содержит 5% брака. Найти вероятность для одной партии деталей быть забракованной. (Решить задачу двумя способами: используя формулу умножения вероятностей и используя только классическую формулу вычисления вероятностей).

28. Пусть $\mathbf{P}(A) = 1/2$. Найдется ли такое событие B, чтобы $\mathbf{P}(AB) > 1/2$? Ответ обосновать.

29. Пусть $\mathbf{P}(A) = 1/2$. Можно ли найти такое событие B, чтобы $\mathbf{P}(A|B) > \mathbf{P}(A)$? Ответ обосновать.

30. Пусть $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B) = 1/2$. Верно ли, что $\mathbf{P}(A|B) \geqslant \mathbf{P}(B|A)$? Ответ обосновать.

31. Пусть события A и B — независимы и $\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(B) = 1/4$. Найти $\mathbf{P}(A + B)$.

32. Пусть $\mathbf{P}(A) = 1/2$, $\mathbf{P}(B) = 2/3$. Верно ли, что $\mathbf{P}(A + B) \geqslant 1/6$? Ответ обосновать.

33. Пусть $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B) = 1/4$. Верно ли, что $\mathbf{P}(A+B)$ будет больше в том случае, когда A и B независимы, чем когда A и B несовместны? Ответ обосновать.

34. Пусть $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B) = 2/3$. Чему равна сумма $\mathbf{P}(\overline{A+B}) + \mathbf{P}(\overline{A} + \overline{B})$?

35. События A и B несовместны, причем $\mathbf{P}(A) > 0$. Совместны или несовместны события A и $\overline{B}$? Ответ обосновать.

36. Монета подбрасывается до первого выпадения герба. Чему равно наиболее вероятное число подбрасываний?

37. Из колоды карт (36 карт) подряд вытаскиваются две карты. Рассматриваются события: $A = \{$первая карта имеет пиковую масть$\}$, $B = \{$обе карты красного цвета$\}$. Зависимы ли события A и B? Ответ обосновать.

38. В ящике имеется две партии по 100 деталей, в каждой из которых по 10 бракованных деталей. Из ящика извлечена одна деталь. Рассмотрим следующие события: $A = \{$извлеченная деталь — из первой партии$\}$, $B = \{$извлеченная деталь — бракованная$\}$? Зависимы ли события A и B? Ответ обосновать.

39. В ящике имеются две партии по 100 деталей. В первой партии — 10 бракованных деталей, во второй — 20 бракованных. Из ящика извлечена одна деталь. Зависимы ли случайные события $A = \{$извлеченная деталь — из первой партии$\}$ и $B = \{$извлеченная деталь — бракованная$\}$? Ответ обосновать.

40. Схема электрической цепи представлена на рис. 4.2, где p_i, $i = \overline{1, 3}$, является вероятностью безотказной работы (надежностью) i-го элемента. Пусть надежности элементов схемы равны

$$p_1 = 0{,}8,\ p_2 = 0{,}7,\ p_3 = 0{,}6.$$

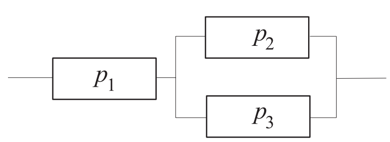


Рис. 4.2

Найти вероятность безотказной работы (надежность) схемы.

41. Три независимых эксперта делают прогноз стоимости акции компании, ошибаясь при этом с одинаковой вероятностью p. Найти p, если вероятность того, что хотя бы один из них ошибается, равна 0,271.

42. В шкафу находится 9 однотипных новых приборов. Для проведения опыта берут наугад три прибора и после работы возвращают их в шкаф. Внешне новые и использованные приборы не отличаются.

Найти вероятность того, что после проведения трех опытов в шкафу не останется новых приборов.

43. Зададим надежности работы элементов электрической цепи: $p_1 = 0{,}8$, $p_2 = 0{,}7$, $p_3 = 0{,}6$, $p_4 = 0{,}5$, $p_5 = 0{,}4$, $p_6 = 0{,}3$.

а) Найти надежность схемы, приведенной на рис. 4.3;

б) Найти надежность схемы, приведенной на рис. 4.4.

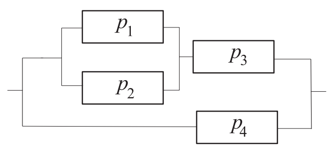


Рис. 4.3

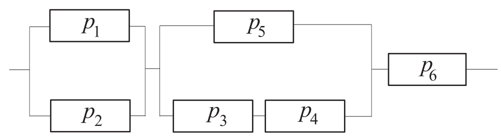


Рис. 4.4

44. Вероятность превысить личный рекорд с одной попытки для данного спортсмена равна p. Найти вероятность того, что на соревнованиях спортсмен превысит свой личный рекорд, если разрешается делать две попытки.

45. В группе учатся 10 студентов. Для решения задачи у доски любого из них могут вызвать с равной вероятностью один раз в течение занятия. В группе три отличника. Найти вероятность того, что вторую задачу к доске пойдет решать отличник, при условии, что первую задачу тоже решал отличник.

46*. По данным переписи населения Англии и Уэльса (1891 г.) установлено, что темноглазые отцы и темноглазые сыновья (событие AB) составили 5% обследованных пар, темноглазые отцы и светлоглазые сыновья (событие $A\overline{B}$) — 7,9% пар, светлоглазые отцы и темноглазые сыновья (событие $\overline{A}B$) — 8,9% пар, светлоглазые отцы и светлоглазые сыновья (событие $\overline{AB}$) — 78,2% пар. Найти связь между цветом глаз отца и сына, то есть найти $\mathbf{P}(B|A)$, $\mathbf{P}(\overline{B}|A)$, $\mathbf{P}(B|\overline{A})$, $\mathbf{P}(\overline{B}|\overline{A})$.

47. Двое поочередно бросают монету. Выигрывает тот, у которого раньше выпадет «герб». Определить вероятности выигрыша для каждого из игроков.

48*. После экзамена на столе преподавателя осталось n зачеток тех студентов, которые не сдали экзамен. Какова вероятность того, что, наугад забирая зачетки, хотя бы один студент возьмет свою зачетку?

49*. *Задача Банаха.* Для прикуривания Банах пользовался двумя коробками спичек, доставая наугад ту или иную коробку. Через некоторое время он обнаружил, что одна коробка пуста. Найти вероятность того, что во второй коробке осталось k спичек, если изначально в каждой коробке было по n спичек?

50. В кармане лежат 5 монет достоинством в 50 коп., 4 монеты по 10 коп. и 1 монета — 5 коп. Наугад берут 3 монеты. Какова вероятность того, что в сумме они составляют не более одного рубля?

51. Фирма рассылает рекламные проспекты восьми потенциальным партнерам. В результате такой рассылки в среднем у каждого пятого потенциального партнера возникает интерес к фирме. Найти вероятность того, что это произойдет: *а*) в трех случаях; *б*) не более чем в трех.

52. Лицензия отбирается у любого торгового предприятия, как только торговая инспекция в третий раз обнаружит серьезное нарушение правил торговли. Найти вероятность того, что лицензия будет отобрана после пятой проверки. Известно, что вероятность обнаружения нарушения при одной проверке равна $0{,}2$ и не зависит от результатов предыдущих проверок.

53. Вероятность рождения мальчика равна $0{,}515$. Найти вероятность того, что в семье, где четверо детей, не менее двух девочек.

54. В микрорайоне девять машин технической службы. Для бесперебойной работы необходимо, чтобы не меньше восьми машин были в исправном состоянии. Считая вероятность исправного состояния для всех машин одинаковой и равной $0{,}9$, найти вероятность бесперебойной работы технической службы в микрорайоне.

55. В среднем каждый десятый договор страховой компании завершается выплатой по страховому случаю. Компания заключила пять договоров. Найти вероятность того, что страховой случай наступит: *а*) один раз; *б*) хотя бы один раз.

56. Подбросили две игральные кости. Какие из представленных ниже наборов событий образуют систему гипотез?

1. $H_1 = \{$на 1-й кости выпало одно очко$\}, \ldots,$
   $H_6 = \{$на 1-й кости выпало шесть очков$\}.$
2. $H_1 = \{$на обеих костях выпало по одному очку$\}, \ldots,$
   $H_6 = \{$на обеих костях выпало по шесть очков$\}.$
3. $H_1 = \{$на 1-й кости выпало четное число очков$\},$
   $H_2 = \{$на 2-й кости выпало нечетное число очков$\}.$
4. $H_1 = \{$на 2-й кости выпало четное число очков$\},$
   $H_2 = \{$на 2-й кости выпало нечетное число очков$\}.$

57. Из 30 билетов, включенных в программу экзамена, студент знает 5. Когда ему выгоднее сдавать экзамен первым или вторым (с точки зрения увеличения вероятности сдачи экзамена)?

58. Две компании X и Y производят однотипную продукцию и конкурируют на рынке сбыта. Перед каждой из них стоит задача модификации производства. Существует два возможных пути изменения технологии: A и B. Вероятность того, что компания X выберет путь A, равна $0{,}4$. Для компании Y эта вероятность равна $0{,}7$. Компании выбирают пути изменения технологии независимо друг от друга. В таблице приведены оцененные экспертами шансы на победу в конкурентной борьбе для компании X в соответствии с выбором компаниями путей изменения технологии. Найти вероятность победы компании X в конкурентной борьбе.

Таблица 4.1

$X\backslash Y$	A	B
A	5:3	2:1
B	1:2	1:2

59. Надежности блоков системы, представленной на рис. 4.5, равны соответственно

$$p_1 = 0{,}7,\quad p_2 = 0{,}7,\quad p_3 = 0{,}6,$$
$$p_4 = 0{,}5,\quad p_5 = 0{,}5.$$

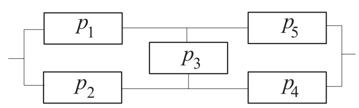


Рис. 4.5

Найти вероятность безотказной работы заданной схемы соединения блоков.

60. Подбрасываются две игральные кости. Образуют ли систему гипотез следующие события: $A=${на первой кости выпало одно очко}, $B=${сумма очков на двух костях равна 9}?

61. Пусть события $H_1, \ldots, H_{10}$ образуют систему равновероятных гипотез. Найти $\mathbf{P}(H_1 + H_{10})$.

62. Может ли априорная вероятность гипотезы быть больше соответствующей апостериорной? Ответ обосновать.

63*. Два независимых претендента Z и L на пост губернатора края завершают предвыборную кампанию. Каждый из них, независимо от действий другого, может успеть выступить только в одном из городов P и M. Эксперты-политологи считают, что выступления претендентов обязательно состоятся, и оценивают вероятность того, что L предпочтет город P, как равную $2/3$. Вероятности выбора городов P и M другим претендентом одинаковы. В табл. 4.2 показано как, по мнению экспертов, распределяются шансы L по отношению к Z одержать победу на выборах в зависимости от города выступления. Найти вероятность того, что победу одержит L.

Таблица 4.2

$L\backslash Z$	P	M
P	3:1	2:1
M	1:1	1:2

64. В ящике лежит 20 теннисных мячей, в том числе 12 новых и 8 игранных. Из ящика извлекают наугад два мяча для игры. После игры мячи возвращают обратно в ящик. После этого из ящика вынимают еще два мяча для следующей игры. Оба мяча оказались неигранными. Найти вероятность того, что первый раз тоже играли новыми мячами.

65. За истекший период в торговую фирму поступали телевизоры от трех фирм-поставщиков в следующей пропорции: 1:3:6. Каждая фирма дает на свои телевизоры гарантию, идентифицируя их по серийному номеру и дате поставки. Телевизоры первой фирмы-поставщика требуют ремонта в течение гарантийного срока в 15% случаев, второй и третьей — соответственно в 10% и 7% случаев. Проданный телевизор требует гарантийного ремонта, однако потеряны документы, идентифицирующие фирму-поставщика. В какую фирму имеет смысл обратиться в первую очередь?

66. Может ли в формуле полной вероятности быть бесконечное число гипотез, а следовательно, и бесконечное число слагаемых?

67. Можно ли для нахождения вероятности события, связанного с опытом, сводящимся к схеме случаев, использовать формулу полной вероятности? Ответ обосновать.

68. Может ли сумма всех априорных вероятностей гипотез оказаться больше суммы всех апостериорных вероятностей этих гипотез? Ответ обосновать.

69. Могут ли апостериорные вероятности всех гипотез, кроме одной, оказаться нулевыми, если априорные вероятности этих гипотез одинаковы? Ответ обосновать.

70. Пусть события H_1, H_2, H_3 образуют систему равновероятных гипотез. Произошло событие H_1. Вычислить апостериорные вероятности всех гипотез.

71. Вывести из формулы полной вероятности классическую формулу вычисления вероятности.

72. Завод изготавливает изделия, каждое из которых с вероятностью p имеет дефект. В цехе изделия осматриваются с равными вероятностями одним из двух контролеров. Первый обнаруживает имеющиеся дефекты с вероятностью p_1, а второй — с вероятностью p_2. Известно, что одно из изделий забраковано. Найти вероятность того, что оно забраковано: *а*) первым контролером; *б*) вторым контролером.

73. Для подготовки к экзамену студенту предложено 20 вопросов. Билет содержит два вопроса. Комплектование билетов вопросами осуществляется случайным образом. Студент подготовил 15 вопросов. Найти вероятность того, что он сдаст экзамен, если для этого достаточно ответить правильно на два вопроса своего билета или на один вопрос своего билета и один вопрос по выбору преподавателя.

74. На предприятии работают 10 рабочих шестого разряда, 15 рабочих пятого разряда и 5 рабочих четвертого разряда. Вероятность того, что изделие, изготовленное рабочим соответствующего разряда, будет одобрено ОТК равна соответственно 0,95, 0,9 и 0,8. Найти вероятность того, что изделие, проверенное ОТК, будет одобрено, при условии, что производительность всех рабочих одинакова.

75. Представители двух фракций Государственной Думы (R и L) претендуют на пост председателя вновь создаваемого комитета. Согласно утвержденному регламенту, выборы должны проводиться альтернативным голосованием по двум кандидатурам (по одной от каждой фракции). У каждой фракции есть по две кандидатуры, обладающие равными шансами быть выдвинутыми в качестве претендента на этот пост. Эксперты оценили шансы фракции R по отношению к L получить пост председателя комитета в зависимости от предложенных кандидатур L_i, R_i, $i = \overline{1, 2}$ (см. табл. 4.3). Найти вероятность того, что победу одержит фракция L.

Таблица 4.3

$R \backslash L$	L_1	L_2
R_1	1:3	3:2
R_2	2:1	1:2

76. На склад поступила однотипная продукция с трех фабрик. Объемы поставок относятся соответственно как 2:5:3. Известно, что нестандартных изделий среди продукции первой фабрики — 3%, второй — 2%, третьей — 1%. Найти вероятности следующих событий: *а*) взятое наугад со склада изделие окажется нестандартным; *б*) взятое наугад со склада изделие произведено первой фабрикой, если известно, что оно оказалось нестандартным.

77. Имеется ящик, в котором лежат 20 коробок по 10 карандашей. При вскрытии ящика 4 коробки уронили, и грифели карандашей в них сломались. Однако все 20 коробок были сданы на склад, откуда затем взяли 2 коробки и раздали карандаши ученикам. Найти вероятность того, что доставшийся ученику карандаш имеет сломаный грифель.

78. Две машинистки печатали рукопись, посменно заменяя друг друга. Первая в конечном итоге напечатала $1/3$ всей рукописи, а вторая — остальное. Первая машинистка делает ошибки с вероятностью 0,15, а вторая — с вероятностью 0,1. При проверке на 13-й странице обнаружена ошибка. Найти вероятность того, что ошиблась первая машинистка.

79. Пассажир может обратиться за получением билета в одну из трех касс. Вероятности обращения в каждую кассу зависят от их местоположения и равны соответственно $p_1 = 1/3$, $p_2 = 1/6$, $p_3 = 1/2$. Вероятность того, что к моменту прихода пассажира билеты, имевшиеся в кассе, будут распроданы, для первой кассы равна $P_1 = 3/4$, для второй кассы — $P_2 = 1/2$, для третьей кассы — $P_3 = 2/3$. Пассажир направился в одну из касс и приобрел билет. Найти вероятность того, что это была первая касса.

80. На экзамен пришли 10 студентов. Трое из них подготовлены отлично, четверо — хорошо, двое — удовлетворительно, один — плохо. В экзаменационных билетах имеется 20 вопросов. Отлично подготовленный студент может ответить на все 20 вопросов, хорошо подготовленный — на 16, удовлетворительно — на 10, плохо — на 5. Студент, сдавший экзамен, ответил на все три заданных вопроса. Найти вероятность того, что этот студент подготовлен: *а*) отлично; *б*) плохо.

81. Среди пациентов туберкулезного диспансера 15% принадлежат к первой категории больных, 66% — ко второй и 19% — к третьей. Вероятности возникновения заболевания, в зависимости от категории больных, равны соответственно 0,12, 0,09, 0,2. Найти:

а) вероятность возникновения заболевания у наугад выбранного пациента диспансера;

б) вероятность принадлежности к третьей категории больных пациента диспансера, у которого обнаружено заболевание.

82. Два независимых претендента Z и L на пост губернатора края завершают предвыборную компанию. Каждый из них, независимо от действий другого, может успеть выступить только в одном из городов P или M. Эксперты-политологи считают, что выступления претендентов обязательно состоятся, и оценивают вероятность того, что L предпочтет город P как $2/3$. Вероятности выбора городов P и M другим претендентом одинаковы. В табл. 4.4 показано, как, по мнению экспертов, распределяются шансы L по отношению к Z одержать победу на выборах в зависимости от города выступления. Найти вероятность того, что оба претендента выступили в городе P, если известно, что победу одержал Z.

Таблица 4.4

$L\backslash Z$	P	M
P	4:3	3:1
M	1:1	1:3

83. В урне находятся 4 белых и 6 черных шаров. Из нее три раза наугад вынимают по одному шару. Требуется найти вероятность того, что все три вынутых шара окажутся белыми (событие A), при выполнении двух разных условий:

а) извлеченные из урны шары обратно не возвращаются;

б) после каждого извлечения шар возвращается обратно.

84. Три радиостанции, независимо друг от друга, передают самолету один и тот же сигнал. Вероятности того, что самолетом будут приняты эти сигналы, соответственно равны: $0,9$, $0,8$, $0,75$. Найти вероятность того, что самолет примет посылаемый ему сигнал.

85. Пусть имеется пять урн. В двух из них лежит по одному белому и трем черным шарам, а в трех урнах — по два белых и два черных шара. Наугад выбирается некоторая урна и из нее вынимается шар. Найти вероятность того, что шар окажется белым.