Г Л А В А IV

СЛУЧАЙНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

§ 13. Закон больших чисел

13.1. Виды сходимости последовательностей СВ. В п. 1.3 при определении вероятности указывался эмпирический факт, состоящий в устойчивости частоты появления события A в исследуемом опыте G при последовательном его повторении. Этот экспериментальный факт может быть обоснован математически с помощью закона больших чисел. Но для этого нам понадобятся некоторые понятия, характеризующие сходимость последовательности СВ.

Определение 13.1. Бесконечная последовательность СВ X_n, $n = 1, 2, \ldots$, определенная на одном пространстве элементарных событий Ω, называется *случайной последовательностью* (СП) и обозначается $\{X_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$

Замечание 13.1. Если последовательность состоит из детерминированных величин x_n, то говорят, что последовательность сходится к величине x (это обозначается $x_n \to x$ или $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $N > 0$, что $|x_n - x| < \varepsilon$ для всех $n \geqslant N$. Попробуем уточнить смысл этого понятия для случайной последовательности. Так как для любого n, вообще говоря, может найтись такое $\varepsilon > 0$, что случайное событие $\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \geqslant \varepsilon\} \neq \varnothing$, то нельзя говорить о сходимости случайной последовательности X_n к X в приведенном выше детерминированном смысле. Мы рассмотрим четыре вида сходимости последовательностей СВ. В дальнейшем для краткости записи мы по-прежнему не будем указывать зависимость СВ $X_n(\omega)$ от элементарного события ω.

Определение 13.2. Пусть $F_n(x)$ — функция распределения СВ X_n, где $n = 1, 2, \ldots$, и $F(x)$ — функция распределения СВ X. СП $\{X_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, *сходится по распределению* к СВ X при $n \to \infty$, если последовательность функций распределения $F_n(x)$ СВ X_n сходится к функции распределения $F(x)$ СВ X в каждой точке x непрерывности функции $F(x)$, т. е. $F_n(x) \to F(x)$ при $n \to \infty$. Этот вид сходимости будем обозначать $X_n \xrightarrow{F} X$.

Пример 13.1. Поясним на примере случай, когда $F_n(x)$ сходится к $F(x)$ во всех точках, за исключением точек разрыва функции $F(x)$. Пусть с вероятностью 1 $X_n = 1/n$, $n = 1, 2, \ldots$, и $X = 0$. Для них

$$F_n(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 1/n, \\ 0, & x < 1/n, \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Очевидно, что $F_n(x) \to F(x)$ при $n \to \infty$ для всех $x \neq 0$. Но $F_n(0) = 0$ для всех n, а $F(0) = 1$, поэтому последовательность $\{F_n(0)\}$, $n = 1, 2, \ldots$, не сходится к $F(0)$. Но точка $x = 0$ является точкой разрыва функции $F(x)$, поэтому согласно определению 13.2 $X_n \xrightarrow{F} X$.

Определение 13.3. Случайная последовательность $\{X_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, *сходится почти наверное* (п.н.) к СВ X при $n \to \infty$, что записывается как $X_n \xrightarrow{\text{п.н.}} X$, если

$$\mathbf{P}\left\{\omega\colon \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\} = 1.$$

Очевидно, что если $X_n \xrightarrow{\text{п.н.}} X$, то вероятность события, состоящего из таких ω, что последовательность $\{x_n\}$ реализаций СВ $X_n(\omega)$ не сходится к реализации x СВ $X(\omega)$, равна нулю:

$$\mathbf{P}\left\{\omega\colon \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) \neq X(\omega)\right\} = 0.$$

Таким образом, сходимость почти наверное случайной последовательности понимается по реализациям СВ X_n и X и в этом смысле похожа на сходимость детерминированной последовательности.

Кроме того, можно показать, что сходимость $X_n \xrightarrow{\text{п.н.}} X$ равносильна тому, что для всех $\varepsilon > 0$ имеет место

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\sup_{m\geqslant n} |X_m - X| \leqslant \varepsilon\right\} = 1.$$

Определение 13.4. Случайная последовательность $\{X_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, *сходится по вероятности* к СВ X при $n \to \infty$, что записывается как $X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} X$, если для всех $\varepsilon > 0$ справедливо

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{|X_n - X| \leqslant \varepsilon\} = 1 \quad \text{или} \quad \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{|X_n - X| > \varepsilon\} = 0.$$

Сходимость п.н. для случайной последовательности влечет за собой и сходимость по вероятности. Действительно,

$$\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \leqslant \varepsilon\} \supseteq \left\{\omega : \sup_{m\geqslant n} |X_m(\omega) - X(\omega)| \leqslant \varepsilon\right\}.$$

Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{|X_n - X| \leqslant \varepsilon\} \geqslant \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\sup_{m\geqslant n} |X_m - X| \leqslant \varepsilon\right\} = 1.$$

Из сходимости по вероятности не следует сходимость п.н.

Если $X_n \xrightarrow{\text{P}} X$, то можно доказать, что и $X_n \xrightarrow{F} X$. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Замечание 13.2. В биржевом парадоксе мы имели сходимость $Z_n \xrightarrow{\text{P}} 0$.

Теорема 13.1. (*Неравенство Чебышева, усиленный вариант*). *Пусть r-й абсолютный момент СВ X конечен, т. е.* $\mathbf{M}[|X|^r] < \infty$. *Тогда для всех $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство* $\mathbf{P}\{|X| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \mathbf{M}[|X|^r]/\varepsilon^r$.

Доказательство. Для простоты доказательства предположим, что у СВ X существует плотность распределения $f_X(x)$. Тогда, используя свойство 3) $f(x)$, имеем

$$\mathbf{M}[|X^r|] \triangleq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x|^r f_X(x)\,dx \geqslant \int\limits_{|x|\geqslant\varepsilon} |x|^r f_X(x)\,dx \geqslant \\ \geqslant \varepsilon^r \int\limits_{|x|\geqslant\varepsilon} f_X(x)\,dx = \varepsilon^r \mathbf{P}\{|X| \geqslant \varepsilon\},$$

откуда следует доказываемое утверждение.

Рассмотрим важный частный случай приведенного неравенства. Пусть СВ $Y \triangleq X - m_X$, где $m_X \triangleq \mathbf{M}[X]$. Тогда, полагая в неравенстве Чебышева $r = 2$, получим

$$\mathbf{P}\{|X - m_X| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{\mathbf{M}[|X - m_X|^2]}{\varepsilon^2} \triangleq \frac{\mathbf{D}[X]}{\varepsilon^2}.$$

Замечание 13.3. Данное неравенство, позволяющее оценить сверху вероятность отклонения СВ от ее МО на основе информации лишь о ее дисперсии, широко используется в теории оценивания и управления стохастическими системами. В литературе чаще всего именно последнее неравенство называют неравенством Чебышева.

Определение 13.5. Случайная последовательность $\{X_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, сходится к СВ X *в среднем квадратическом* при $n \to \infty$, что записывается как $X_n \xrightarrow{\text{с.к.}} X$, если $\mathbf{M}[|X_n - X|^2] \to 0$ при $n \to \infty$.

Покажем, что если $X_n \xrightarrow{\text{с.к.}} X$, то $X_n \xrightarrow{\text{P}} X$. Действительно, рассмотрим СВ $Y_n \triangleq X_n - X$. В силу неравенства Чебышева для СВ Y_n имеем

$$\mathbf{P}\{|Y_n| > \varepsilon\} \leqslant \mathbf{P}\{|Y_n| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{\mathbf{M}[Y_n^2]}{\varepsilon^2} \triangleq \frac{\mathbf{M}[|X_n - X|^2]}{\varepsilon^2}.$$

Поэтому, если $X_n \xrightarrow{\text{с.к.}} X$, т. е. $\mathbf{M}[|X_n - X|^2] \to 0$ при $n \to \infty$, то для любого $\varepsilon > 0$ выполняется $\mathbf{P}\{|Y_n| > \varepsilon\} \to 0$ при $n \to \infty$, т. е. $X_n \xrightarrow{\text{P}} X$. Из сходимости по вероятности не следует сходимость в среднем квадратическом.

Связь между различными видами сходимости удобно представить в виде логической схемы (рис. 13.1).

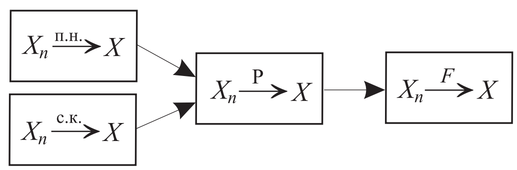

Рис. 13.1

13.2. Сходимость усредненной суммы независимых СВ.

Определение 13.6. Будем говорить, что случайная последовательность $\{X_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, является *последовательностью независимых СВ* X_n, если при любом n СВ $X_1, \ldots, X_n$ независимы.

Рассмотрим усредненную сумму $Y_n \triangleq \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ независимых СВ X_k, $m_k \triangleq \mathbf{M}[X_k]$, $k = \overline{1, n}$. Используя свойство 4)M $[X]$, получим

$$\mathbf{M}[Y_n] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{M}[X_k] \triangleq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} m_k, \quad \mathbf{D}[Y_n] = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{D}[X_k].$$

Определение 13.7. Будем говорить, что к последовательности $\{X_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, независимых СВ применим *закон больших чисел* (ЗБЧ), если $|Y_n - \mathbf{M}[Y_n]| \xrightarrow{\text{P}} 0$ при $n \to \infty$.

Теорема 13.2. *Если для последовательности* $\{X_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, *независимых СВ выполняется условие* $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{D}[Y_n] = 0$, *то к этой последовательности применим закон больших чисел.*

Доказательство. Утверждение теоремы равносильно тому, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{|Y_n - \mathbf{M}[Y_n]| > \varepsilon\} = 0.$$

По неравенству Чебышева

$$\mathbf{P}\{|Y_n - \mathbf{M}[Y_n]| > \varepsilon\} \leqslant \mathbf{P}\{|Y_n - \mathbf{M}[Y_n]| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{\mathbf{D}[Y_n]}{\varepsilon^2}.$$

Согласно условию теоремы, получаем: $|Y_n - \mathbf{M}[Y_n]| \xrightarrow{\text{P}} 0$.

Утверждение теоремы остается верным, если СВ $\{X_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, являются лишь попарно некоррелированными, так как свойство 4)M $[X]$ сохраняется и для некоррелированных СВ.

Теорема 13.3. (*Теорема Чебышева*). *Если последовательность $\{X_n\}$ образована независимыми СВ, дисперсии которых равномерно ограничены, т. е. существует такая константа c, что $\mathbf{D}[X_n] \leqslant c$ для всех $n = 1, 2, \ldots$, то к этой последовательности применим закон больших чисел.*

Доказательство. Так как $\mathbf{D}[X_k] \leqslant c$ для всех $k = 1, 2, \ldots$, то, используя свойство 4)M $[X]$, получим

$$\mathbf{D}[Y_n] = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{D}[X_k] \leqslant \frac{c}{n}.$$

Но $c/n \to 0$ при $n \to \infty$, т. е. условие теоремы 13.2 выполнено и к последовательности $\{X_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, применим закон больших чисел.

Теорема 13.4. *Если последовательность $\{X_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, образована независимыми СВ с одинаковыми распределениями и конечной дисперсией $D[X] < +\infty$, то к этой последовательности применим закон больших чисел, причем $Y_n \xrightarrow{\text{P}} m_X$*, где $m_X = m_k \stackrel{\Delta}{=} \mathbf{M}[X_k]$, $k = 1, 2, \ldots$

Доказательство. В данном случае $\mathbf{D}[X_k] = d_X < \infty$ для всех $k = 1, 2, \ldots$ Поэтому условие теоремы Чебышева выполнено. Кроме того, $\mathbf{M}[X_k] \stackrel{\Delta}{=} m_k = m_X$ для всех $k = 1, 2, \ldots$ Поэтому

$$\mathbf{M}[Y_n] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} m_k = m_X,$$

откуда следует, что $|Y_n - m_X| \xrightarrow{\text{P}} 0$.

Определение 13.8. Будем говорить, что к последовательности $\{X_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, независимых СВ применим *усиленный закон больших чисел*, если $|Y_n - \mathbf{M}[Y_n]| \xrightarrow{\text{п.н.}} 0$ при $n \to \infty$.

Из усиленного закона больших чисел следует закон больших чисел, так как из сходимости почти наверное следует сходимость по вероятности.

Теорема 13.5. (*Теорема Колмогорова*). *К последовательности* $\{X_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, *независимых одинаково распределенных СВ, у которых* m_X *конечно, применим усиленный закон больших чисел, т. е.* $Y_n \xrightarrow{\text{п.н.}} m_X$.

В данной теореме, в отличие от теоремы 13.4, не требуется существования дисперсии СВ X_n. Но доказательство этой теоремы значительно сложнее, чем доказательство теоремы 13.4, поэтому мы не приводим его в данной книге.

Замечание 13.4. Закон больших чисел — это, по сути, свойство случайной последовательности $\{X_n\}, n = 1, 2, \ldots$, состоящее в том, что случайные отклонения отдельных независимых СВ X_n от их общего среднего значения m_X при большом n в своей массе взаимно погашаются. Поэтому, хотя сами величины X_n случайны, их среднее арифметическое значение при достаточно большом n практически уже не случайно и близко к m_X. Таким образом, если МО m_X СВ X_n заранее неизвестно, то, согласно теореме 13.5, его можно вычислить с любой «степенью точности» с помощью среднего арифметического $Y_n \triangleq \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$. Но при этом встает вопрос: в каком смысле понимать точность приближения $Y_n \approx m_X$? Ответ на этот вопрос будет дан в следующем параграфе.

Рассмотрим опыты, проводимые по схеме Бернулли, в результате которых событие A («успех») происходит с вероятностью $p \triangleq \mathbf{P}(A)$. Рассмотрим частоту «успехов» $W_n(A) \triangleq M/n$, где M есть число «успехов» при n испытаниях. Случайная величина M имеет биномиальное распределение $\mathbf{Bi}(n; p)$.

Теорема 13.6. (*Теорема Бернулли, усиленный вариант*). *Частота «успехов» сходится почти наверное к вероятности «успеха», т. е.* $W_n(A) \xrightarrow{\text{п.н.}} \mathbf{P}(A) \triangleq p$.

Доказательство. Так как M имеет биномиальное распределение, то частоту успехов $W_n = M/n$ можно представить в виде усредненной суммы независимых одинаково распределенных СВ X_k, $k = \overline{1, n}$, имеющих распределение Бернулли, со значениями $x_k = 0$ или $x_k = 1$. Причем $\mathbf{P}\{X_k = 1\} = p$, $\mathbf{P}\{X_k = 0\} = q$. Поэтому

$$Y_n = \frac{M}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k, \quad \text{где } \mathbf{M}[X_k] = p,\ \mathbf{D}[X_k] = pq,\ k = 1, 2, \ldots$$

Тогда по теореме 13.5, так как выполнено условие $m_X = p < \infty$, получаем $M/n \xrightarrow{\text{п.н.}} p$.

Замечание 13.5. Самому Якову Бернулли принадлежит доказательство более слабого утверждения, что $W_n(A) \xrightarrow{\text{P}} \mathbf{P}(A)$. Теорема Бернулли объясняет смысл свойства устойчивости частоты $W_n(A) = M/n$, которое мы ранее принимали как экспериментальный факт. Таким образом, теорема Бернулли является «переходным мостиком» от теории вероятностей к ее приложениям.

13.3. Типовые задачи.

Задача 13.1. Суточный расход электроэнергии для личных нужд в населенном пункте составляет в среднем 4000 кВт · ч. Оценить вероятность того, что в ближайшие сутки расход электроэнергии в этом населенном пункте не превысит 10 000 кВт · ч.

Решение. Пусть случайная величина X — расход электроэнергии в течение суток. По условию $\mathbf{M}[X] = 4000$. Поскольку СВ X неотрицательна, то, применяя неравенство Чебышева для $r = 1$, получаем,

$$\mathbf{P}\{X > \varepsilon\} \leqslant \mathbf{P}\{X \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{\mathbf{M}[X]}{\varepsilon}\,.$$

Таким образом,

$$\mathbf{P}\{X > 10\,000\} \leqslant \frac{4000}{10\,000} = 0{,}4.$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}\{X \leqslant 10\,000\} = 1 - \mathbf{P}\{X > 10\,000\} \geqslant 0{,}6.$$

Ответ. Оцениваемая вероятность не меньше 0,6.

Задача 13.2. Некоторый период времени на бирже сохранялся относительно стабильный курс валюты. На основании данных биржевой статистики за этот период была составлена следующая таблица возможных значений изменения курса валют:

Таблица 13.1

Возможное изменение курса, %	-1	$-0{,}5$	0	0,5	1
Вероятность изменения	0,1	0,3	0,5	0,05	0,05

С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что произойдет изменение курса валюты не больше чем на $0{,}6\%$.

Решение. Пусть СВ X — изменение курса валюты (в процентах). Требуется оценить вероятность: $\mathbf{P}\{|X| < 0{,}6\}$. Воспользуемся для этого неравенством Чебышева:

$$\mathbf{P}\{|X| < 0{,}6\} = 1 - \mathbf{P}\{|X| \geqslant 0{,}6\} \geqslant 1 - \frac{\mathbf{M}[X^2]}{(0{,}6)^2}\,.$$

Чтобы вычислить $\mathbf{M}[X^2]$, построим ряд распределения СВ X^2 (см. табл. 13.2). Тогда

$$\mathbf{M}[X^2] = 0{,}25 \cdot 0{,}35 + 1 \cdot 0{,}15 = 0{,}2375.$$

Таблица 13.2

X^2	0	0,25	1
P	0,5	0,35	0,15

Таким образом, имеем

$$\mathbf{P}\{|X| < 0{,}6\} \geqslant 1 - \frac{0{,}2375}{(0{,}6)^2} \approx 0{,}34.$$

Заметим, что можно вычислить точное значение этой вероятности, так как нам известен ряд распределения СВ X. Действительно,

$$\mathbf{P}\{|X| < 0{,}6\} = 1 - \mathbf{P}\Big(\{X = -1\} + \{X = 1\}\Big) = 1 - 0{,}1 - 0{,}05 = 0{,}85.$$

Отметим, что получаемая с помощью неравенства Чебышева оценка оказывается весьма грубой.

Ответ. Нижняя граница оценки вероятности равна $0{,}34$, а истинное значение вероятности равно $0{,}85$.

Задача 13.3. Задана последовательность независимых СВ $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$, причем ряд распределения СВ X_n представлен табл. 13.3. Применим ли к этой последовательности закон больших чисел?

Таблица 13.3

X_n	$-\sqrt{n}$	0	$\sqrt{n}$
P	$1/(2n)$	$1 - 1/n$	$1/(2n)$

Решение. Проверим, выполняются ли условия теоремы Чебышева. Для этого найдем дисперсию СВ X_n. Очевидно, что математическое ожидание X_n равно 0, поэтому

$$\mathbf{D}[X_n] = \mathbf{M}[X_n^2] = (\sqrt{n})^2 \cdot \frac{1}{n} = 1.$$

Таким образом, дисперсии случайных величин X_n, $n = 1, 2, \ldots$, ограничены в совокупности константой $c = 1$. Следовательно, согласно теореме Чебышева, к последовательности $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ применим ЗБЧ.

Ответ. К последовательности $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ применим ЗБЧ.

Задача 13.4. Вероятность того, что при опускании одного жетона приемник игрального автомата сработает правильно, равна 0,95. Найти минимальное число жетонов, при опускании которых в игральный автомат, частота правильной работы автомата была бы заключена в границах от 0,93 до 0,97 включительно с вероятностью не менее 0,93. Применить неравенство Чебышева.

Решение. Пусть случайная величина X_i принимает значение 0, если приемник игрального автомата сработает неправильно при

i-м опускании жетона, и 1, если при i-м опускании жетона приемник игрального автомата сработает правильно, $i = \overline{1,\, n}$. Ряд распределения такой СВ X_i, при любом $i = \overline{1,\, n}$, дан в табл. 13.4.

Для распределения Бернулли

$$\mathbf{M}[X_i] = 0{,}95, \quad \mathbf{D}[X_i] = 0{,}05 \cdot 0{,}95 = 0{,}0475.$$

Обозначим частоту правильной работы игрального автомата W_n. Тогда $W_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$. Считая случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ независимыми, получаем

Таблица 13.4

X_i	0	1
$\mathbf{P}$	0,05	0,95

$$\mathbf{M}[W_n] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{M}[X_i] = \mathbf{M}[X_i] = 0{,}95,$$

$$\mathbf{D}[W_n] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{D}[X_i] = \frac{1}{n}\, \mathbf{D}[X_i] = \frac{0{,}0475}{n}.$$

Искомую вероятность можно записать как

$$\mathbf{P}\{0{,}93 \leqslant W_n \leqslant 0{,}97\} = \mathbf{P}\{0{,}93 - \mathbf{M}[W_n] \leqslant \\ \leqslant W_n - \mathbf{M}[W_n] \leqslant 0{,}97 - \mathbf{M}[W_n]\} = \mathbf{P}\{|W_n - \mathbf{M}[W_n]| \leqslant 0{,}02\}.$$

По неравенству Чебышева получаем

$$\mathbf{P}\{|W_n - \mathbf{M}[W_n]| > 0{,}02\} \leqslant \frac{\mathbf{D}[W_n]}{(0{,}02)^2} = \frac{1}{n}\, \frac{0{,}0475}{(0{,}02)^2} = \frac{118{,}75}{n}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}\{|W_n - \mathbf{M}[W_n]| \leqslant 0{,}02\} = 1 - \mathbf{P}\{|W_n - \mathbf{M}[W_n]| > 0{,}02\} \geqslant 1 - \frac{118{,}75}{n}.$$

Таким образом, искомая вероятность будет не менее $0{,}93$, если будет выполнено неравенство

$$1 - \frac{118{,}75}{n} \geqslant 0{,}93.$$

Разрешая это неравенство, получим

$$n \geqslant \frac{118{,}75}{0{,}07} = 1696{,}4.$$

Ответ. Используя неравенство Чебышева, получаем оценку минимального числа жетонов, равную 1697 жетонам.

§ 14. Центральная предельная теорема

14.1. Сходимость нормированной суммы независимых СВ. Рассмотрим нормированную сумму Z_n независимых СВ $X_k,\ k=\overline{1,n}$:

$$Z_n \triangleq \frac{1}{s_n}\Big(\sum_{i=1}^{n} X_k - \mathbf{M}\Big[\sum_{i=1}^{n} X_k\Big]\Big) = \frac{1}{s_n}\ \sum_{i=1}^{n}(X_k - m_k),$$

где по свойству 4)M $[X]$ имеет место соотношение

$$s_n^2 \triangleq \mathbf{D}\Big[\sum_{i=1}^{n} X_k\Big] = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{D}[X_k] = \sum_{i=1}^{n} \sigma_k^2,$$

так как $\sigma_k^2 \triangleq \mathbf{D}[X_k]$, $m_k \triangleq \mathbf{M}[X_k]$. Так как Z_n является нормированной СВ, то по свойству 5) m_X $\mathbf{M}[Z_n]=0$, $\mathbf{D}[Z_n]=1$. Изучим поведение последовательности СВ Z_n при $n\to\infty$.

Определение 14.1. Будем говорить, что к последовательности $\{X_n\}$, $n=1,2,\ldots$, независимых СВ применима *центральная предельная теорема* (ЦПТ), если последовательность СВ Z_n сходится по распределению к СВ U, имеющей стандартное нормальное распределение, $U\sim \mathbf{N}(0;1)$, т. е. $Z_n \xrightarrow{F} U$.

Замечание 14.1. Как отмечалось выше, закон больших чисел — это, по сути, свойство последовательности независимых СВ X_n (см. замечание 13.4), которое выполняется при определенных условиях. Аналогичную интерпретацию имеет и центральная предельная теорема. Название «центральная предельная теорема», на наш взгляд, не очень точное, так как по смыслу — это свойство, а не теорема. Но так как в литературе это понятие закрепилось, то и мы будем его придерживаться. Фундаментальная роль ЦПТ в теории вероятностей состоит в том, что при весьма общих предположениях сумма большого числа независимых (относительно малых) СВ удовлетворительно описывается нормальным законом. Этим фактом и объясняется очень широкое распространение нормального закона на практике.

Определение 14.2. Будем говорить, что последовательность $\{X_n\}$, $n=1,2,\ldots$, независимых СВ удовлетворяет *условию Ляпунова*, если

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{s_n^3}\ \sum_{k=1}^{n}\mathbf{M}[|X_k-m_k|^3]=0.$$

Поясним смысл условия Ляпунова. Рассмотрим для произвольного $\delta > 0$ случайные события $A_k \triangleq \{|X_k - m_k|/s_n \geqslant \delta\}$, $k = \overline{1,n}$. Тогда по свойству 7)P получаем

$$\mathbf{P}\left\{\frac{1}{s_n}\max_{1\leqslant k\leqslant n}|X_k - m_k| \geqslant \delta\right\} = \mathbf{P}\Big(\sum_{k=1}^{n} A_k\Big) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\mathbf{P}(A_k) \triangleq$$

$$\triangleq \sum_{k=1}^{n}\mathbf{P}\{|X_k - m_k| \geqslant \delta s_n\} \leqslant \left\| \begin{array}{l}\text{теор. } 13.1\\ \varepsilon = s_n\delta,\ r = 3\end{array} \right\| \leqslant \frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\mathbf{M}[|X_k - m_k|^3]}{\delta^3 s_n^3}.$$

По условию Ляпунова последнее выражение стремится к нулю при $n \to \infty$. Таким образом, все слагаемые в нормированной сумме Z_n равномерно малы в том смысле, что вероятность хотя бы одного из них превзойти величину $\delta > 0$ стремится к нулю при возрастании числа слагаемых.

Теорема 14.1. (*Теорема Ляпунова*). *Если последовательность* $\{X_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, *независимых СВ удовлетворяет условию Ляпунова и СВ* X_n, *ее образующие, имеют конечные МО и дисперсии, т. е.* $m_n < \infty$, $\sigma_n^2 < \infty$, *то к* $\{X_n\}$ *применима центральная предельная теорема.*

Доказательство. Пусть

$$s_n^2 = \sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2,\quad Z_n \triangleq \frac{1}{s_n}\sum_{k=1}^{n}\overset{\circ}{X}_k,\quad \text{где } \sigma_k^2 \triangleq D[X_k],\ \overset{\circ}{X} \triangleq X_k - m.$$

Найдем характеристическую функцию $g_k(t)$ СВ $\overset{\circ}{X}_k$, учитывая, что $i^2 = -1$ и согласно свойствам 2) и 5) m_X: $\mathbf{M}[(\overset{\circ}{X}_k)^2] = \sigma_k^2$, $\mathbf{M}[\overset{\circ}{X}_k] = 0$. Имеем

$$g_k(t) \triangleq \mathbf{M}\left[\exp\left\{it\,\overset{\circ}{X}_k\right\}\right] = \left\| \begin{array}{l}\text{По формуле}\\ \text{Тейлора}\end{array} \right\| =$$

$$= \mathbf{M}\left[1 + it\,\overset{\circ}{X}_k + \frac{(it\,\overset{\circ}{X}_k)^2}{2}\right] + R_k(t) = 1 - \frac{\sigma_k^2 t^2}{2} + R_k(t),$$

где для остаточного члена $R_k(t)$ справедлива оценка

$$|R_k(t)| \leqslant Ct^3\mathbf{M}\left[|\,\overset{\circ}{X}_k\,|^3\right].$$

Тогда для СВ Z_n характеристическая функция будет иметь следующий вид:

$$g_{Z_n}(t) \triangleq \mathbf{M}\big[\exp\{itZ_n\}\big] = \mathbf{M}\Big[\exp\Big\{it\sum_{k=1}^{n}\frac{\overset{\circ}{X}_k}{s_n}\Big\}\Big] =$$

$$= \mathbf{M}\Big[\prod_{k=1}^{n}\exp\Big\{\frac{it\,\overset{\circ}{X}_k}{s_n}\Big\}\Big] = \left\| \begin{array}{l} \text{СВ } \overset{\circ}{X}_k \\ \text{независимы} \end{array} \right\| =$$

$$= \prod_{k=1}^{n}\mathbf{M}\Big[\exp\Big\{\frac{it\,\overset{\circ}{X}_k}{s_n}\Big\}\Big] = \prod_{k=1}^{n} g_k\left(\frac{t}{s_n}\right).$$

Подставляя выражение для $g_k(t/s_n)$, получаем

$$g_{Z_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} g_k\left(\frac{t}{s_n}\right) = \prod_{k=1}^{n}\left[1 - \frac{\sigma_k^2 t^2}{2s_n^2} + R_k\left(\frac{t}{s_n}\right)\right].$$

Поэтому

$$\ln g_{Z_n}(t) = \sum_{k=1}^{n}\ln g_k\left(\frac{t}{s_n}\right) = \Big\| \ln(1+\alpha) = \alpha + o(\alpha) \Big\| =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left[-\frac{\sigma_k^2 t^2}{2s_n^2} + R_k\left(\frac{t}{s_n}\right)\right] = -\frac{t^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} R_k\left(\frac{t}{s_n}\right).$$

Но согласно полученной оценке для $R_k(t/s_n)$ и по условию Ляпунова остаточный член в разложении $\ln g_{Z_n}(t)$ стремится к нулю. Таким образом, заключаем, что $\ln g_{z_n}(t) \to -t^2/2$ при $n \to \infty$. Следовательно, $g_{z_n}(t) \to \exp\{-t^2/2\}$ при $n \to \infty$. Но $g_U(t) = \exp\{-t^2/2\}$ является характеристической функцией для СВ U, имеющей нормальное распределение $\mathbf{N}(0;1)$. Характеристическая функция однозначно определяет закон распределения. Поэтому $Z_n \xrightarrow{F} U \sim \mathbf{N}(0;1)$.

Пример 14.1. Рассмотрим последовательность $\{X_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, независимых одинаково распределенных СВ X_n с конечными МО, дисперсией и абсолютным третьим моментом. Тогда

$$s_n = \sqrt{n}\,\sigma_X, \quad \frac{1}{s_n^3}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{M}[|X_k - m_X|^3] = \frac{\mathbf{M}[|X_k - m_X|^3]}{\sigma_X^3\sqrt{n}} \to 0.$$

Таким образом, условие Ляпунова выполнено. Поэтому к последовательности независимых одинаково распределенных СВ в данном случае применима ЦПТ.

Замечание 14.2. Отметим, что существуют и другие условия, отличные от условия Ляпунова, при которых к последовательности СВ применима ЦПТ.

14.2. Сходимость частоты. Рассмотрим частоту «успехов» $W_n(A) \triangleq M/n$ в серии из n последовательных независимых испытаний в схеме Бернулли. При доказательстве теоремы 13.6 (Бернулли) показано, что частоту успехов можно представить в виде суммы $W_n(A) \triangleq \dfrac{M}{n} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$, где $\mathbf{M}[X_k] = p$, $\mathbf{D}[X_k] = pq$. Тогда по свойствам 1)M $[X]$ и 4)M $[X]$ получаем

$$\mathbf{M}[W_n(A)] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{M}[X_k] = p, \quad \mathbf{D}[W_n(A)] = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{D}[X_k] = \frac{pq}{n}.$$

Рассмотрим нормированную частоту успешных испытаний

$$\overset{*}{W}_n \triangleq \frac{W_n - \mathbf{M}[W_n]}{\sqrt{\mathbf{D}[W_n]}} = (W_n - p)\sqrt{\frac{n}{pq}} = \frac{M - np}{\sqrt{npq}}.$$

Так как согласно свойству 2) $\mathbf{Bi}(n;p)$ выполняется $\mathbf{M}[M] = np$, $\mathbf{D}[M] = npq$, то $\overset{*}{W}_n$ можно рассматривать также как нормированное число успешных испытаний.

Т е о р е м а 14.2. (*Теорема Муавра–Лапласа*). *Последовательность* $\{\overset{*}{W}_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, *нормированных частот «успехов» сходится по распределению к нормальной СВ* $U \sim \mathbf{N}(0;1)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проверим условие Ляпунова. СВ X_k, $k = 1, 2, \ldots$, независимы и одинаково распределены, а именно: X_k принимают значения $x_0 = 1$, $x_1 = 0$ с вероятностями $\mathbf{P}\{X_k = 1\} = p$, $\mathbf{P}\{X_k = 0\} = q$. Поэтому в данном случае

$$s_n^2 \triangleq \sum_{k=1}^{n}\mathbf{D}[X_k] = n^2\mathbf{D}[W_n] = npq,$$

и, кроме того,

$$\mathbf{M}[|X_k - \mathbf{M}[X_k]|^3] = p|x_0 - \mathbf{M}[X_k]|^3 + q|x_1 - \mathbf{M}[X_k]|^3 = qp(p^2 + q^2),$$

поэтому

$$\frac{1}{s_n^3}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{M}[|X_k - \mathbf{M}[X_k]|^3] = \frac{1}{(npq)^{3/2}}\sum_{k=1}^{n} qp(p^2+q^2) = \frac{p^2+q^2}{\sqrt{npq}}.$$

Последнее выражение стремится к нулю при $n \to \infty$, т. е. условие Ляпунова выполняется. Следовательно, к последовательности $\{X_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, применима ЦПТ, т. е. $Z_n \xrightarrow{F} U$. Но

$$Z_n \triangleq \frac{1}{s_n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - m_k) = \left\| \begin{array}{l} s_n^2 = npq,\ m_k = p, \\ \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{X_k}{n} = W_n \end{array} \right\| = (W_n - p)\sqrt{\frac{n}{pq}} \triangleq \overset{*}{W}_n.$$

Замечание 14.3. Попутно мы доказали, что к последовательности независимых СВ $X_i \sim \mathbf{Bi}(1;p)$, $n = 1, 2, \ldots$ применима ЦПТ.

В соответствии с теоремой Муавра–Лапласа $\overset{*}{W}_n \xrightarrow{F} U$, т. е. при больших n можно считать, что $\overset{*}{W}_n \approx U$. Но $\overset{*}{W}_n = (W_n - p)\sqrt{n/pq}$, откуда следует, что $W_n = \sqrt{pq/n}\ \overset{*}{W}_n + p$. Таким образом, при больших n в первом приближении можно принять, что частота W_n является нормально распределенной СВ $W_n \approx \sqrt{pq/n}U + p$ с параметрами $\mathbf{M}[W_n] = p$, $\mathbf{D}[W_n] = pq/n$, т. е. можно приближенно считать, что распределение W_n является нормальным.

Поскольку $\overset{*}{W}_n = (M - np)/\sqrt{npq}$, то $M \approx \sqrt{pqn}\,U + np$ и можно приближенно считать, что распределение СВ M является нормальным. Таким образом, мы получаем *локальную теорему Муавра–Лапласа*, в соответствии с которой

$$\mathbf{P}\{M = k\} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp\left\{-\frac{(k-np)^2}{2npq}\right\}.$$

Кроме того, вероятность $\mathbf{P}\{l \leqslant M \leqslant k\}$ может быть легко оценена согласно *интегральной теореме Муавра–Лапласа*:

$$\mathbf{P}\{l \leqslant M \leqslant k\} \approx \Phi_0\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi_0\left(\frac{l-np}{\sqrt{npq}}\right),$$

где $\Phi_0(x)$ — функция Лапласа.

Напомним, что СВ M имеет биномиальное распределение, вероятности $P_n(k)$ для которой сложно вычислять при больших n. Поэтому при больших n для оценки соответствующих вероятностей удобно пользоваться локальной (интегральной) теоремой Муавра–Лапласа.

Если n велико, а p мало, то в схеме Бернулли можно получить другую приближенную оценку для $\mathbf{P}\{l \leqslant M \leqslant k\}$. Согласно теореме 6.1 (Пуассона) при условии $np \equiv a > 0$ биномиальное распределение сходится по распределению при $n \to \infty$ к распределению Пуассона, т. е.

$$\mathbf{P}\{M = k\} = C_n^k p^k q^{n-k} \to \frac{a^k}{k!}\, e^{-a},$$

и следовательно,

$$\mathbf{P}\{l \leqslant M \leqslant k\} \approx \sum_{i=l}^{k} \frac{a^i}{i!}\, e^{-a}.$$

Таким образом, в схеме Бернулли могут быть использованы две аппроксимации.

Пусть СВ $X \sim \mathbf{Bi}(n;p)$, тогда для вычисления соответствующих вероятностей можно пользоваться аппроксимациями, описанными в следующей таблице:

Таблица 14.1

Приближение	$P_n(k)$	$\sum\limits_{i=l}^{k} P_n(i)$
Пуассона	$\dfrac{(np)^k}{k!}e^{-np}$	$\sum\limits_{i=l}^{k} \dfrac{(np)^i}{i!}e^{-np}$
Муавра–Лапласа	$\dfrac{\exp\left\{-\dfrac{(k-np)^2}{2npq}\right\}}{\sqrt{2\pi npq}}$	$\Phi_0\left(\dfrac{k-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi_0\left(\dfrac{l-np}{\sqrt{npq}}\right)$

Погрешности этих приближений даны в табл. 14.2.

Таблица 14.2

Приближение	Погрешность
Пуассона	np^2
Муавра–Лапласа	$\dfrac{p^2+q^2}{\sqrt{npq}}$

14.3. Типовые задачи.

Задача 14.1. Согласно данным статистической службы области 5,5% трудоспособного населения составляют безработные. Оценить вероятность того, что в случайно отобранной группе из 1000 трудоспособных доля безработных будет заключена в границах от 0,045 до 0,065. Решить задачу с помощью неравенства Чебышева и теоремы Муавра–Лапласа. Объяснить различие в результатах.

Решение. Пусть СВ X_i принимает значение 1, если i-й выбранный человек — безработный, и значение 0 — в противном случае; $i = \overline{1,1000}$. Согласно определению, СВ $X_i \sim \mathbf{Bi}(1;0{,}055)$, $\mathbf{M}[X_i] = p = 0{,}055$, $\mathbf{D}[X_i] = p(1-p) = 0{,}0519$. Доля безработных может быть представлена случайной величиной

$$M = \frac{1}{1000}\sum_{i=1}^{1000} X_i.$$

Согласно свойству 2) $\mathbf{Bi}(n;p)$

$$\mathbf{M}[M] = p = 0{,}055, \quad \mathbf{D}[M] = p(1-p) = 5,19\cdot 10^{-5}.$$

Теперь необходимо оценить вероятность

$$\mathbf{P}\{0{,}045 \leqslant M \leqslant 0{,}065\}.$$

Проведем очевидные преобразования:

$$\mathbf{P}\{0{,}045 \leqslant M \leqslant 0{,}065\} = \mathbf{P}\{0{,}045 - \mathbf{M}[M] \leqslant M - \mathbf{M}[M] \leqslant \\ \leqslant 0{,}065 - \mathbf{M}[M]\} = \mathbf{P}\{|M - \mathbf{M}[M]| \leqslant 0{,}01\}.$$

Согласно неравенству Чебышева, имеем

$$1 - \mathbf{P}\{|M - \mathbf{M}[M]| \geqslant 0{,}01\} \geqslant 1 - \frac{\mathbf{D}[M]}{0{,}01^2} = 1 - 0{,}519 = 0{,}481.$$

Согласно интегральной теореме Муавра–Лапласа, имеем

$$\mathbf{P}\{0{,}045 \leqslant M \leqslant 0{,}065\} = \\ = \mathbf{P}\left\{\frac{0{,}045 - \mathbf{M}[M]}{\sqrt{\mathbf{D}[M]}} \leqslant \frac{M - \mathbf{M}[M]}{\sqrt{\mathbf{D}[M]}} \leqslant \frac{0{,}065 - \mathbf{M}[M]}{\sqrt{\mathbf{D}[M]}}\right\} = \\ = \mathbf{P}\left\{-\frac{0{,}01}{0{,}72 \cdot 10^{-2}} \leqslant \frac{M - 1000p}{\sqrt{1000p(1-p)}} \leqslant \frac{0{,}01}{0{,}72 \cdot 10^{-2}}\right\} \approx \\ \approx 2\Phi_0\left(\frac{0{,}01}{0{,}75 \cdot 10^{-2}}\right) = 2\Phi_0(1,33) = 0{,}8164.$$

Ответ. Оценка нижней границы вероятности, полученная с помощью неравенства Чебышева, равна $0{,}481$. Оценка, полученная с помощью теоремы Муавра–Лапласа, равна $0{,}8164$.

Задача 14.2. Вероятность того, что при опускании одного жетона приемник игрального автомата сработает правильно, равна 0,95. Найти минимальное число жетонов, такое, чтобы при опускании их в игральный автомат, частота правильной работы автомата была бы заключена в границах от 0,93 до 0,97 включительно с вероятностью не менее 0,93. Уточнить полученную в задаче 13.4 оценку с помощью теоремы Муавра–Лапласа.

Решение. Используя результаты решения задачи 13.4, искомую вероятность можно записать как

$$\mathbf{P}\{0{,}93 \leqslant W_n \leqslant 0{,}97\} = \mathbf{P}\{0{,}93 - \mathbf{M}[W_n] \leqslant W_n - \mathbf{M}[W_n] \leqslant \\ \leqslant 0{,}97 - \mathbf{M}[W_n]\} = \mathbf{P}\{|W_n - \mathbf{M}[W_n]| \leqslant 0{,}02\},$$

где $\mathbf{M}[W_n] = 0{,}95$, $\mathbf{D}[W_n] = 0{,}0475/n$.

Согласно интегральной теореме Муавра–Лапласа

$$\mathbf{P}\{0{,}93 \leqslant W_n \leqslant 0{,}97\} = \\ = \mathbf{P}\left\{\frac{0{,}93-\mathbf{M}[W_n]}{\sqrt{\mathbf{D}[W_n]}} \leqslant \frac{W_n-\mathbf{M}[W_n]}{\sqrt{\mathbf{D}[W_n]}} \leqslant \frac{0{,}97-\mathbf{M}[W_n]}{\sqrt{\mathbf{D}[W_n]}}\right\} \approx \\ \approx \Phi_0\left(\frac{0{,}97-\mathbf{M}[W_n]}{\sqrt{\mathbf{D}[W_n]}}\right) - \Phi_0\left(\frac{0{,}93-\mathbf{M}[W_n]}{\sqrt{\mathbf{D}[W_n]}}\right) = \\ = \Phi_0(9{,}1766\cdot 10^{-2}\sqrt{n}) - \Phi_0(-9{,}1766\cdot 10^{-2}\sqrt{n}) = \\ = 2\Phi_0(9{,}1766\cdot 10^{-2}\sqrt{n}).$$

Выполнение условия $\mathbf{P}\{0{,}93 \leqslant W_n \leqslant 0{,}97\} \geqslant 0{,}93$ означает, что

$$2\Phi_0\left(\frac{9,1766\sqrt{n}}{100}\right) \geqslant 0{,}93.$$

Воспользовавшись таблицей для функции Лапласа, получим

$$9{,}1766\cdot 10^{-2}\sqrt{n} \geqslant 1{,}8119, \quad \text{или} \quad n \geqslant \left(\frac{1,8119}{9,1766\cdot 10^{-2}}\right)^2 = 389{,}86.$$

О т в е т. Оценка минимального числа жетонов, полученная с помощью теоремы Муавра–Лапласа, равна 390 жетонам.

З а д а ч а 14.3. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,75. Найти вероятность того, что при 200 выстрелах мишень будет поражена: *а*) 160 раз; *б*) не менее 140 раз.

Р е ш е н и е. *а*) В данном случае опыт проводится по схеме Бернулли. Здесь один опыт Бернулли — один выстрел по мишени; «успех» — поражение мишени; вероятность «успеха» $p = 0{,}75$; количество опытов Бернулли $n = 200$. Точное значение вероятности того, что при 200 выстрелах мишень будет поражена ровно 160 раз, вычисляется по формуле Бернулли:

$$P_{200}\{k = 160\} = C_{200}^{160}(0{,}75)^{160}(0{,}25)^{40} = \\ = \frac{200!}{160!\,40!}(0{,}75)^{160}(0{,}25)^{40} \approx 1{,}7346\cdot 10^{-2}.$$

б) Точное значение вероятности того, что при 200 выстрелах мишень будет поражена не менее 140 раз, соответственно равно:

$$P_{200}\{k \geqslant 140\} = \sum_{i=140}^{200} P_{200}\{k = i\} = \sum_{i=140}^{200} C_{200}^{i}(0{,}75)^{i}(0{,}25)^{200-i} = \\ = \sum_{i=140}^{200} \frac{200!}{i!\,(200-i)!}(0{,}75)^{i}(0{,}25)^{200-i} \approx 0{,}95461.$$

При вычислении этих вероятностей можно также пользоваться аппроксимацией Муавра–Лапласа (см. далее).

а) Приближенное значение вероятности того, что при 200 выстрелах мишень будет поражена ровно 160 раз, вычисляется с помощью локальной теоремы Муавра–Лапласа:

$$P_{200}\{k=160\} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{200\cdot 0{,}75\cdot 0{,}25}} \times \\ \times \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(160-200\cdot 0{,}75)^2}{200\cdot 0{,}75\cdot 0{,}25}\right) \approx 1{,}7173\cdot 10^{-2}.$$

б) Приближенное значение вероятности того, что при 200 выстрелах мишень будет поражена не менее 140 раз, вычисляется с помощью интегральной теоремы Муавра–Лапласа:

$$P_{200}\{k \geqslant 140\} = P_{200}\{140 \leqslant k \leqslant 200\} \approx \\ \approx \Phi_0\left(\frac{200-200\cdot 0{,}75}{\sqrt{200\cdot 0{,}75\cdot 0{,}25}}\right) - \Phi_0\left(\frac{140-200\cdot 0{,}75}{\sqrt{200\cdot 0{,}75\cdot 0{,}25}}\right).$$

Воспользовавшись таблицами для функции Лапласа, получим

$$P_{200}\{k \geqslant 140\} \approx 0{,}94876.$$

Ответ. *а*) $P_{200}\{k = 160\} \approx 1{,}7346 \cdot 10^{-2}$; *б*) $P_{200}\{k \geqslant 140\} \approx \approx 0{,}95461$.

§ 15. Задачи для самостоятельного решения

1. Количество воды, необходимое в течение суток предприятию для технических нужд, является случайной величиной, математическое ожидание которой равно $125\,\text{м}^3$. Оценить вероятность того, что в ближайшие сутки расход воды на предприятии будет меньше $500\,\text{м}^3$.

2. Опыт работы рекламной компании показывает, что адресная реклама приводит к заявке в одном из 20 случаев. Компания разослала 1000 рекламных проспектов. Покажите, что с помощью неравенства Чебышева нельзя оценить вероятность того, что число заявок окажется больше 30 и меньше 60. Измените верхнюю границу так, чтобы применение неравенства Чебышева стало возможным, и оцените соответствующую вероятность. Уточните полученный результат с помощью теоремы Муавра–Лапласа.

3. Размер выплаты каждому клиенту банка случаен. Средняя выплата одному клиенту составляет 5000 единиц, а среднеквадратическое отклонение — 2000 единиц. Выплаты отдельным клиентам независимы. Сколько должно быть наличных денег в банке, чтобы с вероятностью 0,95 денег хватило на обслуживание 60 клиентов?

4. Задана последовательность независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ Ряд распределения СВ X_n имеет вид табл. 15.1. Проверить, применим ли к этой последовательности ЗБЧ.

Таблица 15.1

X_n	$-5n$	0	$5n$
$\mathbf{P}$	$1/(2n^2)$	$1-1/n^2$	$1/(2n^2)$

5. Опыт работы страховой компании показывает, что страховой случай приходится примерно на каждый восьмой договор. Оценить с помощью неравенства Чебышева необходимое количество n договоров, которые нужно заключить, чтобы с вероятностью не меньшей, чем 0,8, можно было утверждать, что частота страховых случаев отклонится от вероятности не более чем на 0,01 по абсолютной величине. Уточнить результат с помощью теоремы Муавра–Лапласа.

6. Торговая фирма продала 1000 единиц товара, получая при этом прибыль по 50 рублей с каждой единицы. Гарантийный ремонт фирма осуществляет своими силами и терпит при этом убыток в 200 рублей. Найти границы минимального по длине интервала, внутри которого с вероятностью 0,9545 заключен доход фирмы, если в среднем гарантийный ремонт приходится делать в каждом десятом случае.

7. Скорость ветра в течение суток в данной местности является случайной величиной, математическое ожидание которой равно 6 м/с. Оценить вероятность p того, что в ближайшие сутки скорость ветра в этой местности будет не меньше 16 м/с.

8. Дисперсия отдельного результата измерения случайной величины не превосходит 3. Производится 1000 независимых измерений этой величины. Какие границы можно гарантировать с вероятностью 0,95 для результата измерения среднего арифметического этих величин? Дать ответ с помощью неравенства Чебышева.

9. Среднее изменение курса акций компании в течение одних биржевых торгов составило 1%, а среднеквадратическое отклонение оценивается как $0{,}5\%$. Оценить вероятность p того, что на ближайших торгах курс изменится менее чем на 2%.

10. Задана последовательность независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$, где $X_n \sim \mathbf{R}(-1/n; 1/n)$. Применим ли к этой последовательности закон больших чисел?

11. Предположим, что среднее время опоздания студента на лекцию составляет одну минуту. Оценить вероятность p того, что студент опоздает на лекцию не менее чем на пять минут.

12. Предположим, что в условиях предыдущей задачи дополнительно известно, что среднеквадратическое отклонение времени опоздания студента на лекцию составляет также одну минуту. Оценить минимальное значение x, при котором $\mathbf{P}\{X \geqslant x\} \geqslant p$, где X — случайное время опоздания студента на лекцию, $p = 0{,}1$ — заданный уровень вероятности.

13. В среднем каждая 30-я видеокассета, записываемая на студии, оказывается бракованной. Оценить вероятность p того, что из 900 кассет, записанных на студии, число бракованных окажется в пределах от 25 до 35. Решить задачу с помощью неравенства Чебышева и интегральной теоремы Муавра–Лапласа. Сравнить полученные результаты.

14. Какое минимальное число опытов n следует провести, чтобы с вероятностью 0,95 можно было утверждать, что частота появления события будет отличаться по абсолютной величине от его вероятности, равной 0,6, не более чем на 0,02? Ответ дать с помощью неравенства Чебышева и интегральной теоремы Муавра–Лапласа. Объяснить различие результатов.

15. Выход цыплят в инкубаторе составляет 75% от числа заложенных яиц. Оценить вероятность p того, что из 1000 заложенных яиц вылупятся:

а) ровно 750 цыплят;

б) от 720 до 780 цыплят.

16. В среднем каждый 30-й телевизор, выпускаемый заводом, выходит из строя до окончания гарантийного срока. Оценить с помощью теоремы Муавра–Лапласа вероятность p того, что из 300 выпущенных заводом телевизоров не более 10 поступит в гарантийный ремонт.

17. Пусть в условии задачи 3 известно, что в начале операционного дня в банке было 350 000 единиц наличных денег. Каков будет гарантированный с вероятностью 0,95 остаток n наличных денег в банке после выплаты всем 60 клиентам?

18. Цех завода выпускает шарики для подшипников. За смену производится 10 000 шариков. Вероятность того, что один шарик окажется дефектным, равна 0,05. Причины дефектов отдельных шариков независимы. Продукция проходит контроль сразу после изготовления, и дефектные шарики ссыпаются в бункер для переплавки. Определить, на какое количество шариков n должен быть рассчитан бункер, чтобы с вероятностью 0,99 он не оказался переполненным после смены.