Г Л А В А II

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

§ 5. Основные понятия

5.1. Функция распределения. Пусть на пространстве элементарных событий Ω определена σ-алгебра $\mathcal{F}$.

Определение 5.1. *Случайной величиной* (СВ) $X(\omega)$ называется функция элементарного события ω с областью определения Ω и областью значений $\mathbb{R}^1$ такая, что событие $\{\omega : X(\omega) \leqslant x\}$ принадлежит σ-алгебре $\mathcal{F}$ при любом действительном $x \in \mathbb{R}^1$. Значения x функции $X(\omega)$ называются *реализациями* СВ $X(\omega)$.

Случайные величины будем обозначать прописными (большими) латинскими буквами X, Y, Z, а их возможные значения (реализации) — соответствующими строчными (малыми) буквами x, y, z.

Определение 5.2. *Законом распределения* СВ называется любое правило (таблица, функция), позволяющее находить вероятности всех возможных событий, связанных с СВ.

Рассмотрим вероятность $\mathbf{P}\{\omega : X(\omega) \leqslant x\}$ для различных $x \in \mathbb{R}^1$.

Определение 5.3. Функция

$$F_X(x) \triangleq \mathbf{P}\{\omega : X(\omega) \leqslant x\},$$

определенная для всех $x \in \mathbb{R}^1$, называется *функцией распределения* СВ $X(\omega)$.

Данная вероятность $F_X(x)$ определена, поскольку рассматриваемые события принадлежат классу $\mathcal{F}$ (см. определение 1.13). Далее для простоты записи мы будем обозначать $X \triangleq X(\omega)$, $\{X \leqslant x\} \triangleq \{\omega : X(\omega) \leqslant x\}$, $F(x) \triangleq F_X(x) \triangleq \mathbf{P}\{X \leqslant x\}$.

Замечание 5.1. Функция распределения является одной из форм закона распределения для СВ всех типов и однозначно определяет СВ. Далее вместо фразы «СВ, имеющая функцию распределения $F(x)$» будем говорить для краткости: «СВ с *распределением* $F(x)$».

Свойства $F(x)$

1) $F(x)$ определена для всех $x \in \mathbb{R}^1$ по определению 5.3.

2) $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$ для всех $x \in \mathbb{R}^1$. Так как $F(x)$ — вероятность, то данное свойство следует из свойства 5)P и аксиомы **A1**.

3) $F(-\infty) = 0$, $F(\infty) = 1$. Пусть $B_n \triangleq \{X \leqslant -n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ Очевидно, что $\{X \leqslant -\infty\} = \prod\limits_{n=1}^{\infty} B_n = \varnothing$. Поэтому по аксиоме **A4**: $F(-\infty) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}(B_n) = 0$. Пусть теперь $A_n \triangleq \{X \leqslant n\}$ и $B_n \triangleq \Omega \backslash A_n$, где $n = 1, 2, \ldots$ Тогда B_n удовлетворяет аксиоме **A4**, и поэтому по аксиоме **A3** получаем $F(+\infty) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n) = 1 - \lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}(B_n) = 1$.

4) $F(x_2) - F(x_1) = \mathbf{P}\{x_1 < X \leqslant x_2\}$, если $x_2 > x_1$. Поскольку

$$\{X \leqslant x_2\} = \{X \leqslant x_1\} + \{x_1 < X \leqslant x_2\} \text{ и } \{X \leqslant x_1\}\{x_1 < X \leqslant x_2\} = \varnothing,$$

то по аксиоме **A3**: $F(x_2) \triangleq \mathbf{P}\{X \leqslant x_2\} = F(x_1) + \mathbf{P}\{x_1 < X \leqslant x_2\}$. Отсюда и следует утверждение. Если $F(x)$ непрерывна, то

$$F(x_2) - F(x_1) = \mathbf{P}\{x_1 \leqslant X \leqslant x_2\}.$$

5) $F(x_2) \geqslant F(x_1)$ для $x_2 > x_1$, т. е. $F(x)$ не убывает. Это следует из свойства 4)$F(x)$: $F(x_2) = F(x_1) + \mathbf{P}\{x_1 < X \leqslant x_2\} \geqslant F(x_1)$, так как $\mathbf{P}\{x_1 < X \leqslant x_2\} \geqslant 0$ по аксиоме **A1**.

6) $F(x) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} F(x+\varepsilon)$ при $\varepsilon > 0$, т. е. $F(x)$ — непрерывная справа функция. Это свойство можно доказать, основываясь на аксиоме **A4**.

5.2. Дискретные случайные величины.

Определение 5.4. СВ называется *дискретной*, если множество ее возможных значений счетно.

Пример 5.1. Пусть опыт G состоит в подбрасывании двух монет, а элементарным событием ω является положение упавших монет. Тогда число выпавших «гербов» есть СВ $X(\omega)$ с конечным числом возможных значений $\{0, 1, 2\}$, т. е. является дискретной случайной величиной.

Определение 5.5. Простейшей формой закона распределения дискретной СВ является *ряд распределения* $p_k \triangleq \mathbf{P}\{X = x_k\}$, $k = \overline{0, n}$, который задается аналитически или таблицей (см. табл. 5.1). Здесь в верхней строке расположены по возрастанию все возможные различные значения $x_0, \ldots, x_n$ дискретной СВ X, а в нижней — соответствующие им вероятности $p_0, \ldots, p_n$.

Таблица 5.1

X	x_0	$\ldots$	x_n
$\mathbf{P}$	p_0	$\ldots$	p_n

Имеет место равенство $p_0 + \ldots + p_n = 1$, так как события $\{X = x_0\}, \ldots, \{X = x_n\}$ несовместны и образуют полную группу. Это равенство называют *условием нормировки*.

Графическое изображение ряда распределения называют *многоугольником распределения* (см. рис. 5.1).

Замечание 5.2. Распределение вероятностей аналогично понятию «распределение единичной массы вдоль бесконечного стержня Ox», используемому в механике (этим, в частности, можно объяснить использование в теории вероятностей термина «распределение»). Для дискретного распределения возможна следующая механическая интерпретация: на оси Ox распределена единичная масса так, что массы $p_0, \ldots, p_n$ сосредоточены в отдельных точках $x_0, \ldots, x_n$ соответственно.

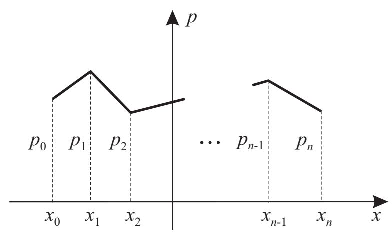

Рис. 5.1

Определение 5.6. *Единичной ступенчатой функцией* или *функцией Хевисайда* называется функция вида (рис. 5.2).

$$l(x) \triangleq \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geqslant 0. \end{cases}$$

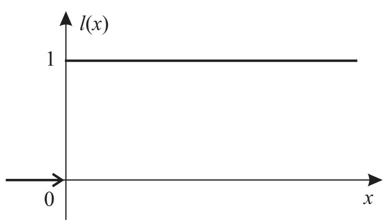

Рис. 5.2

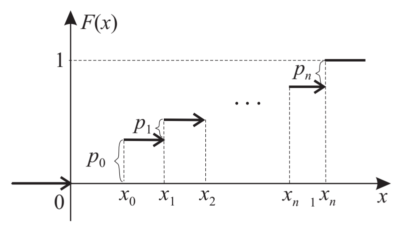

Рис. 5.3

Для дискретной СВ, используя ряд распределения и $l(x)$, можно построить функцию распределения:

$$F(x) = p_0 l(x - x_0) + \ldots + p_n l(x - x_n).$$

Функция распределения дискретной СВ является ступенчатой (рис. 5.3), причем в точках разрыва $F(x)$ величины скачков равны вероятностям $p_0, \ldots, p_n$ соответствующих реализаций $x_0, \ldots, x_n$ СВ X.

5.3. Непрерывные случайные величины.

Определение 5.7. СВ X с непрерывной функцией распределения $F_X(x)$ называется *непрерывной.*

Определение 5.8. *Плотностью распределения* (*плотностью вероятности*) СВ X называется неотрицательная кусочно непрерывная функция $f_X(x)$, для которой при любом $x \in \mathbb{R}^1$ выполняется соотношение

$$F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt.$$

Для простоты дальнейших обозначений будем писать $f(x) \triangleq f_X(x)$.

Определение 5.9. СВ, у которой существует плотность вероятности, называется *абсолютно непрерывной.*

Из определения 5.8, используя правило дифференцирования интеграла с переменным верхним пределом, получаем, что в точках непрерывности плотности $f(x)$ производная функции распределения совпадает с плотностью, т. е. $F'(x) = f(x)$.

Кроме абсолютно непрерывных СВ существуют непрерывные СВ, называемые *сингулярными*, которые не имеют плотности вероятности. В дальнейшем такие СВ не рассматриваются, а под непрерывными СВ будем подразумевать абсолютно непрерывные СВ. Плотность вероятности является одной из форм закона распределения для непрерывных СВ.

Пример 5.2. Пусть СВ X непрерывна. Вычислим $\mathbf{P}\{X = x\}$ для произвольного фиксированного $x \in R$. По аксиоме **A4** имеем

$$\mathbf{P}\{X = x\} = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \mathbf{P}\{x-\varepsilon < X \leqslant x\} = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \Big(F_X(x) - F_X(x-\varepsilon)\Big) = 0.$$

Таким образом, для непрерывной СВ вероятность того, что она примет в опыте некоторое наперед заданное значение, равна 0.

Свойства $f(x)$

1) $f(x) \geqslant 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^1$, т. е. выполняется *условие неотрицательности плотности.* Это свойство следует из определения 5.8.

2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$, т. е. выполняется *условие нормировки плотности.* Поскольку $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$, то согласно свойству 3) $F(x)$ получаем $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = F(\infty) = 1$.

3) $\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = \mathbf{P}\{x_1 \leqslant X \leqslant x_2\}$. По свойству 4) $F(x)$ и согласно примеру 5.2 имеем

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{x_2} f(x)\,dx - \int\limits_{-\infty}^{x_1} f(x)\,dx = F(x_2) - F(x_1) = \mathbf{P}\{x_1 \leqslant X \leqslant x_2\}.$$

4) Рассмотрим СВ $Y \triangleq \varphi(X)$, где $\varphi(x)$ — гладкая строго возрастающая функция скалярного аргумента x, а X — непрерывная СВ с плотностью $f_X(x)$. Тогда плотность распределения СВ Y имеет вид $f_Y(y) = f_X(\psi(y))\psi'(y)$, где $\psi(y) \triangleq \varphi^{-1}(y)$ — обратная по отношению к $\varphi(x)$ функция. Действительно, по определению 5.3 имеем

$$F_Y(y) \triangleq \mathbf{P}\{\varphi(X) \leqslant y\} = \left\| \begin{array}{l} \varphi(x) \text{ и } \psi(y) - \\ \text{строго возрастающие} \end{array} \right\| = \mathbf{P}\{X \leqslant \psi(y)\} =$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{\psi(y)} f_X(x)\,dx = \left\| \begin{array}{l} \text{замена переменной} \\ x \text{ на } y: \ x = \psi(y) \end{array} \right\| = \int\limits_{-\infty}^{y} f_X(\psi(y))\psi'(y)\,dy.$$

Наконец,

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = \frac{d}{dy}\Big(\int\limits_{-\infty}^{y} f_X(\psi(y))\psi'(y)\,dy\Big) = f_X(\psi(y))\psi'(y).$$

Пусть теперь $\varphi(x)$ — гладкая строго убывающая функция. Тогда

$$F_Y(y) \triangleq \mathbf{P}\{\varphi(X) \leqslant y\} = \mathbf{P}\{X \geqslant \psi(y)\} = \int\limits_{\psi(y)}^{+\infty} f_X(x)\,dx =$$
$$= \int\limits_{y}^{\infty} f_X(\psi(y))\psi'(y)\,dy = 1 - \int\limits_{-\infty}^{y} f_X(\psi(y))\psi'(y)\,dy,$$

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}\Big(1 - \int\limits_{-\infty}^{y} f_X(\psi(y))\psi'(y)\,dy\Big) = -f_X(\psi(y))\psi'(y).$$

Таким образом, для гладкой строго монотонной функции $\varphi(x)$ находим

$$f_Y(y) = f_X(\psi(y))|\psi'(y)|.$$

Пример 5.3. Рассмотрим СВ $Y \triangleq aX + b$, где СВ X имеет плотность $f_X(x)$, причем $a \neq 0$. В данном случае $\psi(y) = (y-b)/a$. Поэтому $\psi'(y) = 1/a$. Пользуясь свойством 4) $f(x)$, получаем

$$f_Y(y) = \frac{1}{|a|}\, f_X\left(\frac{y-b}{a}\right).$$

5.4. Числовые характеристики случайных величин. Пусть плотность $f(x)$ непрерывной СВ X такая, что сходится интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x)\, dx$.

Определение 5.10. Число $m_X \triangleq \mathbf{M}[X] \triangleq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx$ называется *математическим ожиданием* (МО) непрерывной СВ X.

Замечание 5.3. В механике число $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx$ соответствует координате центра масс тела, имеющего единичную массу, распределенную по оси Ox с плотностью $f(x)$. По аналогии величину $\mathbf{M}[X]$ иногда называют *средним значением* СВ X. Физическая размерность $\mathbf{M}[X]$ совпадает с размерностью СВ X.

Для дискретной СВ X с конечным числом значений математическое ожидание определяется следующим образом:

$$m_X \triangleq \mathbf{M}[X] \triangleq \sum_{k=0}^{n} p_k x_k, \qquad \text{где} \quad p_k \triangleq \mathbf{P}\{X = x_k\}.$$

Аналогично определяется МО дискретной СВ со счетным числом значений.

Для СВ $Y \triangleq \varphi(X)$, где X — непрерывная СВ, МО СВ Y вычисляется следующим образом:

$$\mathbf{M}[\varphi(X)] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f(x)\, dx,$$

если интеграл абсолютно сходится.

Если X — дискретная СВ, то

$$\mathbf{M}[\varphi(X)] = \sum_{i=0}^{n} \varphi(x_i) p_i.$$

Доказательство этого факта основано на сведениях, изложенных в курсе математического анализа.

Определение 5.11. *Начальными* ν_r и *центральными* μ_r *моментами порядка* r непрерывной СВ X называются числа

$$\nu_r \triangleq \mathbf{M}[X^r] \triangleq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x)\,dx, \quad r = 1, 2, \ldots,$$

$$\mu_r \triangleq \mathbf{M}[(X - m_X)^r] \triangleq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - m_X)^r f(x)\,dx, \quad r = 2, 3, \ldots$$

Для дискретной СВ с конечным числом значений интегралы в определении 5.11 заменяются суммами:

$$\nu_r \triangleq \sum_{k=0}^{n} x_k^r p_k, \qquad \mu_r \triangleq \sum_{k=0}^{n} (x_k - m_X)^r p_k.$$

Определение 5.12. Центральный момент второго порядка μ_2 называется *дисперсией* СВ X и обозначается как $d_X \triangleq \mathbf{D}[X] \triangleq \mu_2$.

Дисперсия d_X характеризует степень рассеивания реализаций СВ X около ее МО.

Определение 5.13. *Средним квадратическим отклонением* (СКО) СВ X называют величину $\sigma_X \triangleq \sqrt{d_X} \geqslant 0$.

Определение 5.14. СВ $\overset{\circ}{X} \triangleq X - m_X$ называется *центрированной*, а СВ $\overset{*}{X} \triangleq \overset{\circ}{X} \big/ \sigma_X$ называется *нормированной.*

Свойства m_X и d_X

1) $\mathbf{M}[c] = c$ и $\mathbf{D}[c] = 0$, если c — константа. Действительно, пусть X — дискретная СВ, принимающая значение c с вероятностью 1, т. е. $\mathbf{P}\{X = c\} = 1$. Тогда $\mathbf{M}[X] \triangleq c\mathbf{P}\{X = c\} = c$. Аналогично, $\mathbf{D}[X] \triangleq (c - \mathbf{M}[c])^2 \mathbf{P}\{X = c\} = 0$.

2) $\mathbf{M}[cX] = c\mathbf{M}[X]$, если c — константа. Пусть X — непрерывная СВ, тогда

$$\mathbf{M}[cX] \triangleq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} cxf(x)\,dx = c\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx \triangleq cm_X.$$

3) $\mathbf{M}[X + c] = m_X + c$, если c — константа, так как для непрерывной СВ

$$\mathbf{M}[X + c] \triangleq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x + c)f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} cf(x)\,dx = m_X + c.$$

4) $|\mathbf{M}[X]| \leqslant \mathbf{M}[|X|]$, поскольку для непрерывной СВ

$$|\mathbf{M}[X]| \triangleq \left| \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx \right| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x)\, dx = \mathbf{M}[|X|].$$

5) $\mathbf{M}[\overset{*}{X}] = 0$, $\mathbf{D}[\overset{*}{X}] = 1$. Действительно, $\mathbf{M}[\overset{*}{X}] \triangleq \mathbf{M}\left[\dfrac{X - m_X}{\sigma_X}\right]$, поэтому по свойствам $2)m_X$ и $3)m_X$ получаем $\mathbf{M}[\overset{*}{X}] = 0$ и

$$\mathbf{D}[\overset{*}{X}] \triangleq \mathbf{M}[(\overset{*}{X} - \mathbf{M}[\overset{*}{X}])^2] = \frac{1}{\sigma_X^2}\mathbf{M}[(X - m_X)^2] = \frac{\mathbf{D}[X]}{\sigma_X^2} = 1.$$

6) Пусть функция $\varphi(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x)$. Тогда, если $\mathbf{M}[\varphi_k(X)]$ существуют для всех $k = \overline{1,n}$, то $\mathbf{M}[\varphi(X)] = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \mathbf{M}[\varphi_k(X)]$. Действительно, в случае непрерывной СВ X, используя линейные свойства интеграла, получаем

$$\mathbf{M}[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x)\right) f(x)\, dx =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} a_k \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_k(x) f(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbf{M}[\varphi_k(X)].$$

7) $\mathbf{D}[X] = \mathbf{M}[X^2] - m_X^2$. Действительно, по свойству $6)\,m_X$ имеем

$$\mathbf{D}[X] \triangleq \mathbf{M}[(X - m_X)^2] = \mathbf{M}[X^2] - 2\mathbf{M}[X]m_X + m_X^2 = \mathbf{M}[X^2] - m_X^2.$$

8) $\mathbf{D}[cX] = c^2\mathbf{D}[X]$, $\mathbf{D}[c + X] = \mathbf{D}[X]$, где c — константа.

9) Пусть СВ X имеет конечное математическое ожидание и распределение СВ обладает свойством симметрии, т. е. график плотности вероятности (для непрерывной СВ X) или многоугольник распределения (для дискретной СВ X) симметричен относительно прямой $x = c$. И тогда $\mathbf{M}[X] = c$.

Свойства $2)m_X$–$6)m_X$, доказанные выше для непрерывных СВ, справедливы также и для дискретных СВ.

5.5. Характеристическая функция.

Определение 5.15. *Характеристической функцией* СВ X называется комплекснозначная функция вида

$$g_X(t) \triangleq \mathbf{M}\left[e^{itX}\right],$$

где $t \in \mathbb{R}^1$, $i^2 = -1$. Если СВ X — непрерывная, то

$$g_X(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_X(x)\,dx,$$

если СВ X — дискретная с конечным числом значений, то

$$g_X(t) = \sum_{k=0}^{n} p_k e^{itx_k}.$$

Аналогично определяется $g_X(t)$ для дискретной СВ со счетным числом значений.

Характеристическая функция представляет собой преобразование Фурье плотности вероятности $f_X(x)$ СВ X. Поэтому обратное преобразование Фурье приводит к соотношению

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} g_X(t)\,dt.$$

Таким образом, для непрерывной СВ задание $g_X(t)$ равносильно заданию $f_X(x)$ и наоборот. Для простоты обозначений в дальнейшем будем писать $g(t) \triangleq g_X(t)$.

Рассмотрим основные свойства характеристической функции. Для простоты изложения доказательство этих свойств будем проводить только для непрерывных СВ.

Свойства $g(t)$

1) $|g(t)| \leqslant 1$ для всех $t \in \mathbb{R}^1$. Так как $e^{itx} = \cos tx + i \sin tx$, то $|e^{itx}|^2 = \cos^2 tx + \sin^2 tx = 1$, поэтому $|g(t)| \leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |e^{itx}| f(x)\,dx = 1$.

2) $g(0) = 1$, поскольку $e^{it0} = 1$ и $g(0) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$.

3) $\nu_r \triangleq \mathbf{M}[X^r] = \dfrac{1}{i^r}\,\dfrac{d^r}{dt^r}\,g(t)\Big|_{t=0}$. Продифференцируем r раз функцию $g(t)$:

$$\frac{d^r}{dt^r}\,g(t) \triangleq \frac{d^r}{dt^r}\left(\mathbf{M}\left[e^{itX}\right]\right) = \frac{d^r}{dt^r}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{d^r}{dt^r}e^{itx}\right) f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} i^r x^r e^{itx} f(x)\,dx = i^r\mathbf{M}\left[X^r e^{itX}\right].$$

Отсюда при $t = 0$ получаем указанную формулу.

4) Пусть $Y = aX + b$, где X — СВ с плотностью $f_X(x)$ и характеристической функцией $g_X(t)$. Тогда

$$g_Y(t) \triangleq \mathbf{M}\left[e^{it(aX+b)}\right] = e^{itb}\mathbf{M}\left[e^{itaX}\right] = e^{itb}g_X(at).$$

5.6. Квантиль.

Определение 5.16. *Квантилью уровня p* функции распределения $F(x)$ СВ X называется минимальное значение x_p, при котором функция распределения $F(x)$ не меньше значения p, где $p \in (0,1)$, т. е.

$$x_p \triangleq \min\{x\colon\, F(x) \geqslant p\}, \qquad p \in (0,1).$$

На рис. 5.4 указаны квантили уровней α, β и γ некоторой функции распределения $F(x)$.

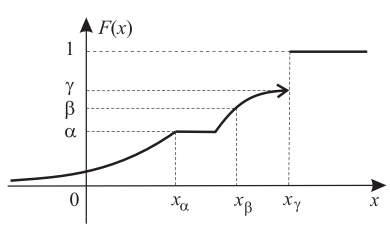

Рис. 5.4

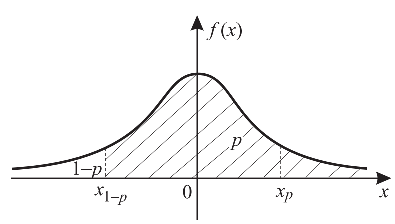

Рис. 5.5

Если функция распределения строго монотонна и непрерывна, то квантиль является единственным решением уравнения $F(x_p) = p$.

Определение 5.17. Квантиль уровня $p = 1/2$ называется *медианой*.

Если плотность распределения существует, симметрична относительно оси Oy и строго положительна на связном множестве (отрезке или оси Ox), то $x_p = -x_{1-p}$. Действительно, пусть СВ $Y \stackrel{\Delta}{=} -X$. При сделанных предположениях $F_Y(x) \equiv F_X(x)$, поэтому $y_p = x_p$ для любого p. Далее, так как $f_Y(x) \equiv f_X(x)$ и $\int\limits_{x_{1-p}}^{\infty} f_X(x)\,dx = p$, то $y_p = -x_{1-p}$. Поэтому $x_p = -x_{1-p}$ (рис. 5.5).

Замечание 5.4. Квантиль является одной из основных статистических характеристик, используемых в математической статистике (см. гл. V, VI).

5.7. Типовые задачи.

Задача 5.1. Известно, что $\mathbf{P}\{X > 3\} = 1/3$. Найти $F_X(3)$.

Решение. По определению функции распределения

$$F_X(x) = \mathbf{P}\{X \leqslant x\}.$$

Следовательно, $F_X(3) = 1 - \mathbf{P}\{X > 3\}$. Поэтому

$$F_X(3) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Ответ. $F_X(3) = 2/3$.

Задача 5.2. Для СВ Y и X заданы ряды распределений в виде табл. 5.2 и 5.3.

Таблица 5.2

X	-1	0
$\mathbf{P}$	$1/2$	$1/2$

Таблица 5.3

Y	0	1
$\mathbf{P}$	$1/2$	$1/2$

Сравнить $F_X(F_Y(1/2))$ и $F_Y(F_X(1/2))$.

Решение. Используя ряды распределений, соответственно получаем:

$$F_Y(1/2) = \mathbf{P}\{Y \leqslant 1/2\} = \mathbf{P}\{Y = 0\} = 1/2,$$

$$F_X(1/2) = \mathbf{P}\{X \leqslant 1/2\} = \mathbf{P}\Big(\{X = -1\} + \{X = 0\}\Big) = \\ = \mathbf{P}\{X = -1\} + \mathbf{P}\{X = 0\} = 1.$$

Аналогично,

$$F_X(F_Y(1/2)) = F_X(1/2) = 1,$$

$$F_Y(F_X(1/2)) = F_Y(1) = \mathbf{P}\{Y \leqslant 1\} = \mathbf{P}\Big(\{Y = 0\} + \{Y = 1\}\Big) = 1.$$

Ответ. $F_X(F_Y(1/2)) = F_Y(F_X(1/2))$.

Задача 5.3. Даны функции:

$$1)\ f_1(x) = -x^2; \quad 2)\ f_2(x) = \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}; \quad 3)\ f_3(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{(1+x^2)}.$$

Являются ли эти функции плотностями вероятности?

Решение. Здесь необходимо проверить выполнение условий неотрицательности и нормировки. У первой функции не выполнено условие неотрицательности, так как $f_1(x) \leqslant 0$. У второй функции не выполнено условие нормировки, так как интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}(1+\sin x)\,dx$ расходится. Наконец, третья функция является плотностью, так как она неотрицательна и

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_3(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 1.$$

Ответ. Плотностью распределения является только $f_3(x)$.

Задача 5.4. Известно, что случайная величина X, принимающая два значения $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$, имеет математическое ожидание, равное 2,2. Построить ряд распределения СВ X, найти дисперсию и построить график функции распределения.

Решение. Пусть $\mathbf{P}\{X=2\} = p$, $\mathbf{P}\{X=3\} = 1-p$. Используя определение математического ожидания

$$\mathbf{M}[X] = 2p + 3(1-p) = 3 - p,$$

получаем уравнение $3 - p = 2{,}2$, откуда находим $p = 0{,}8$. Ряд распределения представлен в табл. 5.4. Теперь вычисляем дисперсию: $\mathbf{D}[X] = (2-2{,}2)^2 \cdot 0{,}8 + (3-2{,}2)^2 \cdot 0{,}2 = 0{,}16$.

Таблица 5.4

X	2	3
$\mathbf{P}$	0,8	0,2

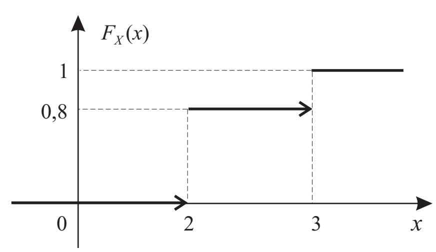

Рис. 5.6

Ответ. Ряд распределения приведен в табл. 5.4, $\mathbf{D}[X] = 0{,}16$, график функции распределения приведен на рис. 5.6.

Задача 5.5. Сделано два высокорисковых вклада — 20 млн руб. в компанию A и 18 млн руб. в компанию B. Компания A обещает 40% годовых, но может обанкротиться с вероятностью 0,3, компания B обещает 30% годовых, но может обанкротиться с вероятностью 0,2. Будем считать, что банкротства компаний независимы. Составить ряд распределения случайной величины X, равной сумме вкладов, полученных от двух компаний через год. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X.

Решение. Согласно условию задачи СВ X может принимать следующие значения:

$x_1 = 0$, если обе компании обанкротятся;

$x_2 = 20 + 0{,}4 \cdot 20 = 28$, если обанкротится только компания B;

$x_3 = 18 + 0{,}3 \cdot 18 = 23{,}4$, если обанкротится только компания A;

$x_4 = 28 + 23{,}4 = 51{,}4$, если ни одна из компаний не обанкротится.

Для построения ряда распределения случайной величины X достаточно найти вероятности событий $\{X = x_i\}$, $i = \overline{1,\,4}$.

Рассмотрим дополнительно события:

$$A = \{\text{Компания A обанкротится}\}, \quad B = \{\text{Компания B обанкротится}\}.$$

Тогда

$$\mathbf{P}\{X = x_1\} = \mathbf{P}(A \cdot B).$$

Согласно формуле умножения вероятностей, а также учитывая независимость событий A и B, будем иметь

$$\mathbf{P}\{X = x_1\} = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B) = 0{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}06.$$

Аналогично найдем вероятности оставшихся событий. Имея в виду, что события $\overline{A}$ и $\overline{B}$ так же независимы, как и события A и B, получим

$$\mathbf{P}\{X = x_2\} = \mathbf{P}(\overline{A} \cdot B) = \mathbf{P}(\overline{A}) \cdot \mathbf{P}(B) = 0{,}7 \cdot 0{,}2 = 0{,}14,$$

$$\mathbf{P}\{X = x_3\} = \mathbf{P}(A \cdot \overline{B}) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(\overline{B}) = 0{,}3 \cdot 0{,}8 = 0{,}24,$$

$$\mathbf{P}\{X = x_4\} = \mathbf{P}(\overline{A} \cdot \overline{B}) = \mathbf{P}(\overline{A}) \cdot \mathbf{P}(\overline{B}) = 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}56.$$

Таким образом, имеем ряд распределения случайной величины X (см. табл. 5.5). По определению математическое ожидание СВ X может быть найдено следующим образом:

Таблица 5.5

X	0	23,4	28	51,4
P	0,06	0,24	0,14	0,56

$$\mathbf{M}[X] = \sum_{i=1}^{4} x_i p_i = 38{,}32.$$

Найдем также дисперсию СВ X:

$$\mathbf{D}[X] = \sum_{i=1}^{4} (x_i - \mathbf{M}[X])^2 p_i = 252{,}25.$$

Ответ. $\mathbf{M}[X] = 38{,}32$, $\mathbf{D}[X] = 252{,}25$.

Задача 5.6. Плотность вероятности случайной величины X выглядит следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{2}x^2, & |x| \leqslant h, \\ 0, & |x| > h. \end{cases}$$

Найти h, $\mathbf{M}[X]$, $F(x)$, $\mathbf{D}[2X+3]$, $\mathbf{M}[X^2 - 3X + 2]$.

Решение. Для нахождения h воспользуемся условием нормировки, согласно которому $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$. В данном случае

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{3}{2}\int\limits_{-h}^{h} x^2\,dx = \frac{3}{2}\,\frac{x^3}{3}\Bigg|_{-h}^{h} = h^3.$$

Таким образом, $h^3 = 1$, и поэтому $h = 1$. Для нахождения функции распределения воспользуемся формулой, связывающей плотность $f(x)$ с функцией распределения $F(x)$:

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt.$$

Тогда $F(x) = 0$, если $x \in (-\infty, -1]$.

Если $x \in (-1, 1]$, то $F(x) = \int\limits_{-1}^{x} \frac{3}{2}\,t^2\,dt = \frac{1}{2}\,(x^3 + 1)$.

Если $x \in (1, +\infty)$, то $F(x) = \int\limits_{-1}^{1} t^2\,dt = 1$.

Таким образом,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, -1], \\ \dfrac{x^3}{2} + \dfrac{1}{2}, & x \in (-1, 1], \\ 1, & x \in (1, \infty]. \end{cases} \tag{5.1}$$

Для нахождения $\mathbf{M}[X^2 - 3X + 2]$ и $\mathbf{D}[2X + 3]$ воспользуемся свойствами математического ожидания и дисперсии. Получим

$$\mathbf{M}[X^2 - 3X + 2] = \mathbf{M}[X^2] - 3\mathbf{M}[X] + 2,$$

$$\mathbf{D}[2X + 3] = 4\mathbf{D}[X]. \tag{5.2}$$

Выразив $\mathbf{M}[X^2]$ через $\mathbf{M}[X]$ и $\mathbf{D}[X]$, получим

$$\mathbf{M}[X^2] = (\mathbf{M}[X])^2 + \mathbf{D}[X].$$

Таким образом,

$$\mathbf{M}[X^2 - 3X + 2] = \mathbf{D}[X] + (\mathbf{M}[X])^2 - 3\mathbf{M}[X] + 2. \tag{5.3}$$

Вычислим

$$\mathbf{M}[X] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx = \frac{3}{2}\int\limits_{-1}^{1} x^3\,dx = \frac{3}{2}\,\frac{x^4}{4}\bigg|_{-1}^{1} = 0,$$

$$\mathbf{D}[X] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathbf{M}[X])^2 f(x)\,dx = \frac{3}{2}\int\limits_{-1}^{1} x^4\,dx = \frac{3}{2}\frac{x^5}{5}\bigg|_{-1}^{1} = \frac{3}{2}\frac{2}{5} = \frac{3}{5}.$$

Заметим, что математическое ожидание случайной величины X можно было не вычислять, так как график плотности $f(x)$ симметричен относительно вертикальной прямой $x = 0$, и следовательно, согласно свойству 9)m_X имеем $\mathbf{M}[X] = 0$.

Подставив найденные значения $\mathbf{M}[X]$ и $\mathbf{D}[X]$ в формулы (5.2) и (5.3), получим

$$\mathbf{M}[X^2 - 3X + 2] = \frac{3}{5} + 2 = 2{,}6,$$

$$\mathbf{D}[2X + 3] = 4 \cdot \frac{3}{5} = 2{,}4.$$

Ответ. $h = 1$, $\mathbf{M}[X] = 0$, выражение для $F(x)$ приведено в (5.1), $\mathbf{M}[X^2 - 3X + 2] = 2{,}6$, $\mathbf{D}[2X + 3] = 2{,}4$.

Задача 5.7. Найти квантиль уровня $p = 2/3$ для двух случайных величин:

а) случайная величина X имеет ряд распределения, указанный в табл. 5.6);

Таблица 5.6

X	0	1	2	3
P	0,25	0,25	0,25	0,25

б) случайная величина Y имеет плотность вероятности

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0,1], \\ 0, & x \notin [0,1]. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. *а*) По определению должно выполняться неравенство

$$2/3 \leqslant F(x_{2/3})$$

и $x_{2/3}$ должно быть минимальным среди всех чисел, удовлетворяющих этому условию. Непосредственные вычисления дают следующий результат:

$$F(0) = \mathbf{P}\{X \leqslant 0\} = \mathbf{P}\{X = 0\} = 1/4 < 2/3,$$
$$F(1) = \mathbf{P}\{X \leqslant 1\} = \mathbf{P}\{X = 0\} + \mathbf{P}\{X = 1\} = 1/2 < 2/3,$$
$$F(2) = \mathbf{P}\{X \leqslant 2\} = \mathbf{P}\{X = 0\} + \mathbf{P}\{X = 1\} + \mathbf{P}\{X = 2\} = 3/4 > 2/3.$$

Таким образом, $x_{2/3} = 2$.

б) В данном случае на отрезке $[0,1]$ функция распределения СВ X имеет вид

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x 2t\,dt = x^2, \qquad x \in [0,1],$$

и поэтому является непрерывной и строго монотонной на отрезке $[0,1]$. В соответствии со свойством квантили находим $x_{2/3}$ из уравнения $F(x_{2/3}) = 2/3$, откуда $x_{2/3} = \sqrt{2/3}$.

О т в е т. *а*) $x_{2/3} = 2$; *б*) $x_{2/3} = \sqrt{2/3}$.

§ 6. Основные дискретные распределения

6.1. Биномиальное распределение.

О п р е д е л е н и е 6.1. Дискретная СВ X с реализациями $x_k = k$, $k = \overline{0,n}$, имеет *биномиальное распределение* с параметрами n и $p \in (0,1)$, что символически записывается как $X \sim \mathbf{Bi}(n;p)$, если вероятность события $\{X = x_k\}$ определяется формулой Бернулли:

$$p_k \triangleq \mathbf{P}\{X = x_k\} \triangleq P_n(k) \triangleq C_n^k p^k q^{n-k}, \quad q = 1 - p.$$

Ряд распределения представлен в табл. 6.1.

Пусть опыт G повторяется n раз в одних и тех же условиях, при этом событие A появляется при каждом повторении опыта с одной и той же вероятностью $p \triangleq \mathbf{P}(A)$. Тогда по теореме 3.5 вероятность появления события A ровно k раз при n повторениях опыта определяется формулой Бернулли: $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, т. е.

случайная величина X, являющаяся числом появления события A при n повторениях опыта, имеет биномиальное распределение.

Таблица 6.1

X	0	1	...	k	...	$n-1$	n
$\mathbf{P}$	q^n	npq^{n-1}	...	$C_n^k p^k q^{n-k}$	...	nqp^{n-1}	p^n

Замечание 6.1. Правая часть формулы Бернулли совпадает с выражением для $(k+1)$-го слагаемого в разложении бинома Ньютона $(p+q)^n$, и поэтому такое распределение называется биноминальным.

Свойства биномиального распределения $\mathbf{Bi}(n;p)$

1) Характеристическая функция СВ $X \sim \mathbf{Bi}(n;p)$ равна

$$g(t) \triangleq \sum_{k=0}^{n} p_k e^{itk} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (pe^{it})^k q^{n-k} = \|\text{бином Ньютона}\| = (q+pe^{it})^n.$$

2) Из свойства 3) $g(t)$ получаем значение математического ожидания и дисперсии:

$$m_X \triangleq \nu_1 = \frac{1}{i}\frac{d}{dt}g(t)\Big|_{t=0} = \frac{1}{i}\frac{d}{dt}\left[(q+pe^{it})^n\right]\Big|_{t=0} = \\ = (q+pe^{it})^{n-1}e^{it}\Big|_{t=0} = np(q+p)^{n-1} = np,$$

$$\nu_2 = \frac{1}{i^2}\frac{d^2}{dt^2}g(t)\Big|_{t=0} = \frac{np}{i}\frac{d}{dt}\left[(q+pe^{it})^{n-1}e^{it}\right]\Big|_{t=0} = np^2(n-1) \times \\ \times e^{2it}(q+pe^{it})^{n-2}\Big|_{t=0} + np(q+pe^{it})^{n-1}e^{it}\Big|_{t=0} = n^2p^2 + npq.$$

Учитывая свойство 7) m_X, получаем

$$d_X \triangleq \mu_2 = \nu_2 - m_X^2 = n^2p^2 + npq - n^2p^2 = npq.$$

3) Наиболее вероятное значение k^* СВ $X \sim \mathbf{Bi}(n;p)$ удовлетворяет неравенству

$$(n+1)p - 1 \leqslant k^* \leqslant (n+1)p.$$

Пример 6.1. Монету подбрасывают три раза. Требуется найти ряд распределения числа X выпавших «гербов». СВ X распределена по биномиальному закону с параметрами $n = 3$, $p = 1/2$. Поэтому СВ X может принимать значения 0, 1, 2, 3 с вероятностями

$$p_0 = C_3^0\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8},\ p_2 = p_1 = C_3^1\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8},\ p_3 = 1-(p_0+p_1+p_2) = \frac{1}{8}$$

соответственно. Таким образом, получаем ряд распределения, представленный в табл. 6.2.

Таблица 6.2

X	0	1	2	3
P	1/8	3/8	3/8	1/8

Пример 6.2. Предположим, требуется оценить экономическую целесообразность ежедневного открытия магазина в 8 часов утра в течение 5 рабочих дней. Пусть вероятность появления покупателей в это время суток известна и равна p. Тогда вероятность прихода покупателей в это время k раз за неделю выражается формулой Бернулли. При этом, если, например, для $k = 4$ эта вероятность $P_5(4)$ окажется близкой к единице, то следует ожидать экономический эффект от открытия магазина в 8 часов утра.

6.2. Распределение Бернулли.

Определение 6.2. Биномиальное распределение $\mathbf{Bi}(1;p)$ с параметрами $n = 1$ и $p \in (0,1)$ называется *распределением Бернулли.*

Для распределения $\mathbf{Bi}(1;p)$ имеем $g(t) = q + pe^{it}$, $m_X = p$, $d_X = p(1-p)$.

Замечание 6.2. Распределение Бернулли $\mathbf{Bi}(1;p)$ играет фундаментальную роль в теории вероятностей и математической статистике, являясь математической моделью опыта с двумя исходами.

Если X_m, $m = \overline{1,n}$, — независимые СВ (см. определение 11.5) с распределением $\mathbf{Bi}(1;p)$, тогда СВ $X \triangleq \sum\limits_{m=1}^{n} X_m$ имеет распределение $\mathbf{Bi}(n;p)$.

Пример 6.3. Пусть имеется партия некоторой продукции, в которой некачественная продукция встречается с вероятностью $1 - p$, а продукция без дефектов — с вероятностью p. Положим $x_0 = 1$, если попалась продукция без дефектов, и $x_1 = 0$, если продукция с дефектом. Тогда «качество» продукции можно описать случайной величиной, имеющей распределение Бернулли $\mathbf{Bi}(1;p)$.

6.3. Распределение Пуассона.

Определение 6.3. Дискретная СВ X с реализациями $x_k = k$, $k = 0, 1, \ldots$, имеет *распределение Пуассона* с параметром $a > 0$, что символически записывается как $X \sim \mathbf{\Pi}(a)$, если

$$p_k \triangleq \mathbf{P}\{X = x_k\} = \frac{a^k}{k!}\, e^{-a}.$$

Ряд распределения представлен в табл. 6.3.

Таблица 6.3

X	0	1	$\ldots$	k	$\ldots$
$\mathbf{P}$	e^{-a}	ae^{-a}	$\ldots$	$\frac{a^k}{k!}e^{-a}$	$\ldots$

Свойства распределения Пуассона $\mathbf{\Pi}(a)$

1) Найдем характеристическую функцию СВ $X \sim \mathbf{\Pi}(a)$:

$$g(t) \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} p_k e^{itk} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!}\, e^{-a} e^{itk} = e^{-a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ae^{it})^k}{k!} = e^{-a} e^{ae^{it}} = e^{a(e^{it}-1)}.$$

2) По свойству 3) $g(t)$ получаем математическое ожидание и дисперсию:

$$\begin{aligned}
m_X &\triangleq \nu_1 = \frac{1}{i}\frac{d}{dt}g(t)\Big|_{t=0} = \frac{1}{i}\left[aie^{it}e^{a(e^{it}-1)}\right]\Big|_{t=0} = a,\\
\nu_2 &= \frac{1}{i^2}\frac{d^2}{dt^2}g(t)\Big|_{t=0} = \frac{a}{i}\frac{d}{dt}\left[ie^{it}e^{a(e^{it}-1)}\right]\Big|_{t=0} = a(1+a),\\
d_X &= \nu_2 - m_X^2 = a.
\end{aligned}$$

3) Наиболее вероятное значение k^* СВ $X \sim \mathbf{\Pi}(a)$ удовлетворяет неравенству

$$a - 1 \leqslant k^* \leqslant a.$$

Для распределения Пуассона выполняется числовое равенство $m_X = d_X = a$. На практике СВ имеет, как правило, физическую размерность. В этом случае физические размерности МО и дисперсии не совпадают, хотя их числовые значения для распределения Пуассона равны.

Замечание 6.3. Распределение Пуассона широко используется в теории массового обслуживания. Приведем пример типичной ситуации, когда возникает такое распределение.

Пример 6.4. Пусть на телефонную станцию в произвольные моменты времени случайным образом поступают заявки на переговоры с городом $\mathcal{N}$ так, что выполняются три условия:

а) вероятность появления любого количества заявок за какой-либо отрезок времени не зависит от того, сколько их поступило за любой другой, не пересекающийся с ним отрезок, т. е. заявки распределяются на оси времени t независимо друг от друга. Это *условие независимости*;

б) вероятность появления за достаточно малый интервал времени Δt двух и более заявок пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью поступления в течение этого интервала времени одной заявки. Это *условие ординарности*;

в) вероятность появления фиксированного числа заявок в интервале времени τ зависит лишь от длины этого интервала, но не зависит от его расположения на оси t. Это *условие стационарности*.

В данном случае можно показать, что СВ X, равная числу заявок, поступивших на телефонную станцию за единицу времени, имеет распределение $\mathbf{\Pi}(a)$, где a — среднее число заявок, поступающих в единицу времени.

Пример 6.5. Пусть машина проехала некоторое расстояние и X — число проколов шины на этом расстоянии, которые по ходу движения устраняются. Тогда вероятность k проколов шины может быть найдена по формуле Пуассона (с соответствующим параметром a).

Между биномиальным распределением $\mathbf{Bi}(n;p)$ и распределением Пуассона $\mathbf{\Pi}(a)$ имеется следующая связь.

Теорема 6.1. (*Теорема Пуассона*). *Пусть $n \to \infty$, $p \to 0$ и при этом $np \equiv a = \mathrm{const}$. Тогда*

$$P_n(k) \to \frac{a^k}{k}\, e^{-a}, \qquad \text{где } P_n(k) \triangleq C_n^k p^k q^{n-k}, \;\; k = \overline{0,n}.$$

Доказательство. Докажем это утверждение, пользуясь вторым замечательным пределом $(1 - a/n)^n \to e^{-a}$ при $n \to \infty$. Так как здесь $p = a/n$, $q = 1 - a/n$, то

$$\lim_{n\to\infty} P_n(k) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \left(\frac{a}{n}\right)^k \left(1 - \frac{a}{n}\right)^{n-k} = \\ = \frac{a^k}{k!} \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \frac{(1-a/n)^n}{(1-a/n)^k} = \frac{a^k}{k!}\, e^{-a}.$$

Таким образом, при больших n и малых p (при редких явлениях) двухпараметрическое биномиальное распределение $\mathbf{Bi}(n;p)$ можно приближенно заменить однопараметрическим распределением

Пуассона $\mathbf{\Pi}(a)$, где $a = np$. При этом ошибка от такой замены не превышает np^2 для всех $k = \overline{0,n}$, т. е.

$$\left| C_n^k p^k q^{n-k} - \frac{(np)^k}{k!} e^{-np} \right| \leqslant np^2.$$

Если условия теоремы Пуассона не выполняются, т. е. p достаточно велико, то применяется другая оценка $P_n(k)$ (см. теорему 14.2).

6.4. Типовые задачи.

Задача 6.1. Случайная величина $X \sim \mathbf{Bi}(1; 0{,}1)$. Как распределена СВ X^n, где n — целое число?

Решение. Для СВ X по определению имеем ряд распределения, который представлен табл. 6.4. Поскольку X принимает только два возможных значения 0 и 1, то множество возможных значений СВ X^n также состоит из 0 и 1. Поэтому для построения ряда распределения остается вычислить соответствующие вероятности. Очевидно, что $\{X^n = 0\} = \{X = 0\}$ и, следовательно, искомые вероятности равны

Таблица 6.4

X	0	1
$\mathbf{P}$	0,9	0,1

$$\mathbf{P}\{X^n = 0\} = \mathbf{P}\{X = 0\} = 0{,}9,$$
$$\mathbf{P}\{X^n = 1\} = 1 - \mathbf{P}\{X^n = 0\} = 0{,}1.$$

Таким образом, $X^n \sim \mathbf{Bi}(1; 0{,}1)$.

Ответ. $X^n \sim \mathbf{Bi}(1; 0{,}1)$.

Задача 6.2. Пусть X и Y — число «успехов» и «неуспехов» в 100 опытах, проводимых по схеме Бернулли. Вероятность «успеха» в одном опыте равна $1/2$. Сравнить $\mathbf{M}[X]$ и $\mathbf{M}[Y]$, $\mathbf{D}[X]$ и $\mathbf{D}[Y]$.

Решение. Для определенности будем считать, что под «успехом» в одном опыте понимается появление некоторого случайного события A, а, соответственно, «неуспех» состоит в том, что происходит событие $\overline{A}$. Тогда для СВ X по определению получаем $X \sim \mathbf{Bi}(100; 1/2)$, где $n = 100$, $p = \mathbf{P}(A) = 1/2$.

Для того чтобы получить закон распределения СВ Y поступим следующим образом: назовем теперь «успехом» в опыте появление события $\overline{A}$, а «неуспехом» — событие A. В этом случае Y — число «успехов» в $n = 100$ опытах, а вероятность «успеха» теперь

$$q = \mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(A) = 1 - p = 1/2.$$

Таким образом, $Y \sim \mathbf{Bi}(100; 1/2)$.

После этого решение задачи получается просто:

$$\mathbf{M}[X] = \mathbf{M}[Y], \quad \mathbf{D}[X] = \mathbf{D}[Y].$$

Ответ. $\mathbf{M}[X] = \mathbf{M}[Y]$, $\mathbf{D}[X] = \mathbf{D}[Y]$.

Задача 6.3. СВ $X \sim \mathbf{\Pi}(a)$, $a = 2$. Найти: *а*) $\mathbf{P}\{X < \mathbf{M}[X]\}$; *б*) наиболее вероятное значение k^* СВ X и $\mathbf{P}\{X = k^*\}$; *в*) $\mathbf{P}\{X > 0\}$; *г*) $\mathbf{M}[X^2]$.

Решение. *а*) По формуле связи математического ожидания с параметром a закона распределения $\mathbf{\Pi}(a)$ имеем $\mathbf{M}[X] = a$. Тогда

$$\mathbf{P}\{X < \mathbf{M}[X]\} = \mathbf{P}\{X < 2\} = \mathbf{P}\Big(\{X = 0\} + \{X = 1\}\Big) =$$
$$= \mathbf{P}\{X = 0) + \mathbf{P}\{X = 1\} = \frac{a^0}{0!}\,e^{-a} + \frac{a^1}{1!}\,e^{-a} = (a+1)e^{-a} = 3e^{-2}.$$

б) Согласно свойству 3 распределения Пуассона, наиболее вероятное значение k^* для СВ $X \sim \mathbf{\Pi}(a)$ лежит в интервале $a - 1 \leqslant k^* \leqslant a$. Следовательно, в нашем случае $1 \leqslant k^* \leqslant 2$. Таким образом, наиболее вероятных значений два: $k_1^* = 1$ и $k_2^* = 2$. Найдем соответствующие им вероятности:

$$\mathbf{P}\{X = k_1^*\} = \mathbf{P}\{X = 1\} = \frac{a^1}{1!}\,e^{-a} = 2e^{-2},$$

$$\mathbf{P}\{X = k_2^*\} = \mathbf{P}\{X = 2\} = \frac{a^2}{2!}\,e^{-a} = 2e^{-2}.$$

в) Случайная величина $X \sim \mathbf{\Pi}(a)$ принимает значения $0, 1, 2\ldots$ Следовательно,

$$\mathbf{P}\{X > 0\} = 1 - \mathbf{P}\{X = 0\} = 1 - \frac{1}{e^2}\,.$$

г) Воспользуемся формулой связи второго начального момента, который нужно найти, с $\mathbf{M}[X]$ и $\mathbf{D}[X]$:

$$\mathbf{M}[X^2] = \mathbf{D}[X] + (\mathbf{M}[X])^2 = a + a^2 = 2 + 2^2 = 6.$$

Ответ. *а*) $\mathbf{P}\{X < \mathbf{M}[X]\} = 3e^{-2}$; *б*) наиболее вероятные значения: 1 и 2, $\mathbf{P}\{X = 1\} = \mathbf{P}\{X = 2\} = 2e^{-2}$; *в*) $\mathbf{P}\{X > 0\} = 1 - \dfrac{1}{e^2}$; *г*) $\mathbf{M}[X^2] = 6$.

Задача 6.4. Страховая компания заключает однотипные договоры, причем страховая премия (сумма, выплачиваемая страхуемым при заключении договора) составляет 4 тыс. рублей. При наступлении страхового случая компания должна выплатить 20 тыс. рублей. Известно, что страховой случай наступает в 4% случаев. Фирме удалось застраховать 200 клиентов. Ответить на вопросы:

а) Каков средний доход фирмы и среднеквадратическое отклонение дохода фирмы?

б) Какова вероятность того, что доход фирмы будет находиться в пределах от 710 до 750 тыс. рублей?

Решение. Обозначим через X случайную величину, равную количеству клиентов, которым страховая компания будет делать выплаты по страховому случаю. Так как страховой случай наступает в 4% случаев, то вероятность того, что он наступит при работе с одним конкретным клиентом составляет $0{,}04$. Поэтому случайная величина X имеет биномиальный закон распределения с параметрами $n = 200$ и $p = 0{,}04$, т.е. $X \sim \mathbf{Bi}(200; 0{,}04)$. Обозначим через Y случайную величину, равную доходу фирмы. Согласно условию задачи СВ Y связана с X следующим образом:

$$Y = 200 \cdot 4000 - 20\,000\,X.$$

а) Воспользуемся свойствами математического ожидания и дисперсии для нахождения $\mathbf{M}[Y]$ и $\mathbf{D}[Y]$:

$$\mathbf{M}[Y] = \mathbf{M}[800\,000 - 20\,000\,X] = 800\,000 - 20\,000\,\mathbf{M}[X],$$
$$\mathbf{D}[Y] = \mathbf{D}[200\,000 - 20\,000\,X] = 4 \cdot 10^8\,\mathbf{D}[X].$$

Известно, что для биномиального закона распределения

$$\mathbf{M}[X] = np = 200 \cdot 0{,}04 = 8,$$
$$\mathbf{D}[X] = np(1-p) = 200 \cdot 0{,}04 \cdot 0{,}96 = 7{,}68.$$

Получаем

$$\mathbf{M}[Y] = 800\,000 - 20\,000 \cdot 8 = 640\,000,$$
$$\mathbf{D}[Y] = 4 \cdot 10^8 \cdot 7{,}68 = 3072 \cdot 10^6.$$

Таким образом, среднеквадратическое отклонение дохода фирмы равно $\sqrt{3072 \cdot 10^6} \approx 55\,426$ руб.

б) Используя известные формулы, получаем

$$\mathbf{P}\{710\,000 \leqslant Y \leqslant 750\,000\} = \mathbf{P}\{2{,}5 \leqslant X \leqslant 4{,}5\} =$$
$$= \mathbf{P}\Big(\{X = 3\} + \{X = 4\}\Big) = \mathbf{P}\{X = 3\} + \mathbf{P}\{X = 4\} =$$
$$= C_{200}^3 (0{,}04)^3 (1 - 0{,}04)^{200-3} + C_{200}^4 (0{,}04)^4 (1 - 0{,}04)^{200-4} \approx 0{,}0825.$$

Ответ. *а*) Средний доход фирмы равен 40 тыс. рублей, а среднеквадратическое отклонение — $55{,}426 \cdot 10^3$ руб.; *б*) вероятность приблизительно равна $0{,}0825$.

Задача 6.5. Вероятность того, что в течение часа на станцию скорой помощи не поступит ни одного вызова, равна $0{,}00248$. Считая, что число X вызовов, поступивших в течение часа на станцию, имеет распределение Пуассона, найти математическое ожидание и дисперсию X.

Решение. По условию СВ $X \sim \mathbf{\Pi}(a)$, следовательно $\mathbf{P}\{X = 0\} = e^{-a} = 0{,}00248$. Отсюда $a = 5{,}9994$. Так как $X \sim \mathbf{\Pi}(a)$, то $\mathbf{M}[X] = a = 5{,}9994$, $\mathbf{D}[X] = a = 5{,}9994$.

Ответ. $\mathbf{M}[X] = 5{,}9994$, $\mathbf{D}[X] = 5{,}9994$.

§ 7. Основные непрерывные распределения

7.1. Равномерное распределение.

Определение 7.1. СВ X распределена *равномерно на отрезке* $[a,b]$ $(X \sim \mathbf{R}(a;b))$, если (рис. 7.1)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a,b], \\ 0, & x \notin [a,b]. \end{cases}$$

Свойства равномерного распределения $\mathbf{R}(a;b)$

1) Нетрудно убедиться в том, что функция распределения имеет вид (рис. 7.2)

$$F(x) \triangleq \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \leqslant x \leqslant b, \\ 1, & x > b. \end{cases}$$

2) Характеристическая функция СВ $X \sim \mathbf{R}(a;b)$:

$$g(t) \triangleq \mathbf{M}[e^{itX}] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)\,dx = \frac{1}{b-a}\int\limits_{a}^{b} e^{itx}\,dx = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}.$$

3) МО и дисперсия по определению равны

$$m_X \triangleq \nu_1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \int\limits_a^b \frac{x}{b-a}\,dx = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2},$$

$$\nu_2 \triangleq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b x^2\,dx = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2+ba+a^2}{3},$$

$$d_X \triangleq \mu_2 = \nu_2 - m_X^2 = \frac{b^2+ba+a^2}{3} - \frac{a^2+2ab+b^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

В данном случае МО можно было бы найти проще, воспользовавшись свойством 9) m_X, так как график плотности вероятности равномерного закона симметричен относительно прямой $x = (a+b)/2$.

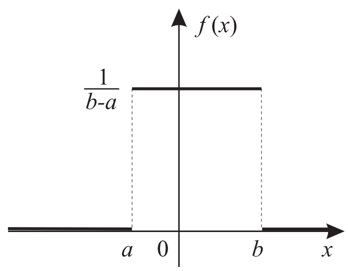

Рис. 7.1

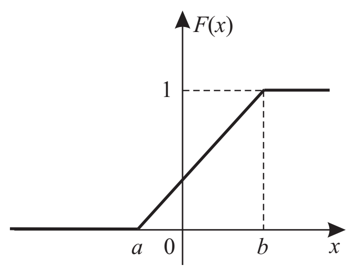

Рис. 7.2

4) Линейное преобразование $Y \triangleq \dfrac{X-a}{b-a}$ переводит СВ $X \sim \mathbf{R}(a;b)$ в СВ $Y \sim \mathbf{R}(0;1)$. Действительно, согласно примеру 5.3

$$f_Y(y) = (b-a)f_X(y(b-a)+a) = \begin{cases} 1, & y \in [0,1], \\ 0, & y \notin [0,1]. \end{cases}$$

5) Если СВ Y имеет непрерывную строго возрастающую функцию распределения $F_Y(y)$, то СВ $X \triangleq F_Y(Y)$ имеет распределение $\mathbf{R}(0;1)$. Действительно, в этом случае функция $x = F_Y(y)$ имеет обратную функцию $y = F_Y^{-1}(x)$ и эти функции являются взаимно обратными. Поэтому для всех $x \in [0,1]$ получаем

$$F_X(x) \triangleq \mathbf{P}\{F_Y(Y) \leqslant x\} = \mathbf{P}\{Y \leqslant F_Y^{-1}(x)\} = F_Y(F_Y^{-1}(x)) = x.$$

Кроме того, $F_X(x) = 0$, если $x < 0$, и $F_X(x) = 1$, если $x > 1$. Таким образом, СВ $Y \triangleq F_Y^{-1}(X)$ будет иметь требуемую функцию распределения $F_Y(y)$, если $X \sim \mathbf{R}(0;1)$. Данный результат, верный и в более общем случае, когда функция распределения лишь непрерывна, используется для моделирования СВ с произвольно заданным законом распределения.

Замечание 7.1. Равномерное распределение является непрерывным аналогом дискретного распределения вероятностей для опытов с равновероятными исходами.

Пример 7.1. СВ X, являющаяся погрешностью приближенных вычислений каких-либо параметров при округлении до ближайших целых чисел, удовлетворительно описывается распределением $\mathbf{R}(-1/2;1/2)$.

7.2. Экспоненциальное распределение.

Определение 7.2. СВ X имеет *экспоненциальное* (*показательное*) *распределение* с параметром $\lambda > 0$, т.е. $X \sim \mathbf{E}(\lambda)$, если (рис. 7.3)

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases}$$

Свойства экспоненциального распределения $\mathbf{E}(\lambda)$

1) Функция распределения СВ $X \sim \mathbf{E}(\lambda)$ равна (рис. 7.4) $F(x) = 0$, если $x < 0$, и

$$F(x) \triangleq \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \left\| \begin{array}{l} f(t) = 0, \\ \text{если } t < 0 \end{array} \right\| = \lambda \int\limits_{0}^{x} e^{-\lambda t}\,dt = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x \geqslant 0.$$

2) Характеристическая функция СВ $X \sim \mathbf{E}(\lambda)$:

$$g(t) \triangleq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)\,dx = \lambda \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\lambda x} e^{itx}\,dx = \\ = \lambda \int\limits_{0}^{+\infty} e^{x(it-\lambda)}\,dx = \frac{\lambda}{it-\lambda} e^{x(it-\lambda)}\Big|_{x=0}^{+\infty} = \frac{\lambda}{\lambda - it}.$$

3) Найдем МО и дисперсию СВ $X \sim \mathbf{E}(\lambda)$:

$$m_X \triangleq \nu_1 = \frac{1}{i}\frac{d}{dt}g(t)\Big|_{t=0} = \frac{\lambda}{(\lambda - it)^2}\Big|_{t=0} = \frac{1}{\lambda},$$

$$\nu_2 = \frac{1}{i^2}\frac{d^2}{dt^2}g(t)\Big|_{t=0} = \frac{2\lambda}{(\lambda - it)^3}\Big|_{t=0} = \frac{2}{\lambda^2},$$

$$d_X = \nu_2 - \nu_1^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Замечание 7.2. Экспоненциальное распределение является одним из основных распределений, используемых в теории надежности.

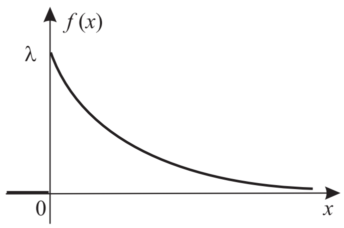

Рис. 7.3

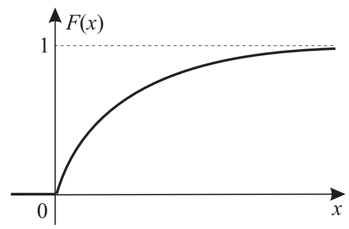

Рис. 7.4

Пример 7.2. Продолжительность безотказной работы многих технических устройств, а также время задержки вылета самолета по вине технических служб аэропорта удовлетворительно описываются соответствующими экспоненциальными распределениями.

7.3. Нормальное распределение.

Определение 7.3. СВ X имеет *нормальное* (*гауссовское*) *распределение* с параметрами m и $\sigma^2 > 0$, т. е. $X \sim \mathbf{N}(m; \sigma^2)$, если

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

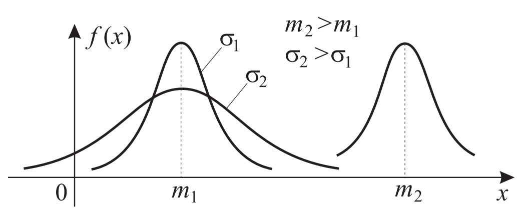

Рис. 7.5

При этом СВ называется *нормальной* (*гауссовской*). График плотности нормального распределения (рис. 7.5), называемый *кривой Гаусса*, имеет единственный максимум в точке $x = m$.

Свойства нормального распределения $\mathbf{N}(m;\sigma^2)$

1) Найдем выражение для функции распределения СВ $X \sim \sim \mathbf{N}(m;\sigma^2)$:

$$F(x) \triangleq \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x} \exp\left\{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}\right\} dt =$$

$$= \left\| y \triangleq \frac{t-m}{\sigma};\ dy = \frac{1}{\sigma}\,dt \right\| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x-m}{\sigma}} e^{-y^2/2}\,dy = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right).$$

Здесь введено обозначение $\Phi(y) \triangleq \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{y} e^{-t^2/2}\,dt$ для функции распределения *стандартной нормальной* СВ $X \sim \mathbf{N}(0;1)$. График функции распределения $F(x)$ представлен на рис. 7.6. Вместо $\Phi(y)$ в справочниках встречается также *функция Лапласа*

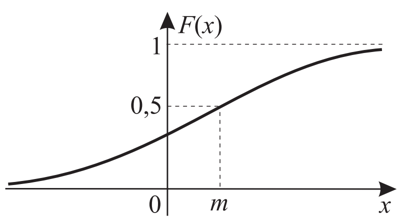

Рис. 7.6

$$\Phi_0(y) \triangleq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{y} e^{-t^2/2}\,dt.$$

Легко убедиться в том, что $\Phi_0(-y) = -\Phi_0(y)$ и $\Phi(y) = 1/2 + \Phi_0(y)$.

2) Характеристическая функция СВ $X \sim \mathbf{N}(0;1)$ имеет вид $g(t) = = e^{-t^2/2}$. Действительно,

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} e^{itx} dx = \|\text{формула Эйлера}\| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\cos tx\,dx + \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\sin tx\,dx =$$

$$= \left\| \begin{array}{ll} \sin tx, & \text{— нечетная} \\ e^{-x^2/2} & \text{— четная} \\ \text{пределы симметр.} & \end{array} \right\| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\cos tx\,dx.$$

Применяя метод интегрирования по частям, имеем

$$g'(t) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2/2} \sin tx \, dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Big[e^{-x^2/2} \sin tx \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} \cos tx \, dx \Big] = -t\, g(t).$$

Решая это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными при начальном условии $g(0) = 1$, находим $\ln g(t) = -t^2/2$. Рассмотрим СВ $X \sim \mathbf{N}(m; \sigma^2)$. Тогда нормированная СВ $\overset{*}{X} \triangleq \dfrac{X-m}{\sigma}$ имеет нормальное распределение $\mathbf{N}(0; 1)$ и, следовательно, характеристическую функцию $g(t) = e^{-t^2/2}$. Далее, согласно свойству 4) $g(t)$ для СВ $X \triangleq \sigma \overset{*}{X} + m$ имеем

$$g_X(t) = e^{itm} g_{\overset{*}{X}}(\sigma t) = \exp(itm - t^2\sigma^2/2).$$

3) МО и дисперсия СВ $X \sim \mathbf{N}(m; \sigma^2)$ равны

$$m_X = \nu_1 = \frac{1}{i} \frac{d}{dt} g(t) \Big|_{t=0} = \frac{(im - t\sigma^2)}{i} \exp(itm - t^2\sigma^2/2) \Big|_{t=0} = m,$$

$$\nu_2 = \frac{1}{i^2} \frac{d^2}{dt^2} g(t) \Big|_{t=0} = \frac{1}{i^2} \Big[-\sigma^2 \exp(itm - t^2\sigma^2/2) +$$

$$+ (im - t\sigma^2)^2 \exp(itm - t^2\sigma^2/2) \Big] \Big|_{t=0} = -\frac{\sigma^2 + m^2}{i^2} = \sigma^2 + m^2,$$

$$d_X = \nu_2 - \nu_1^2 = \sigma^2.$$

В данном случае МО можно было бы найти проще, воспользовавшись 9) m_X, так как график плотности вероятности нормального закона распределения симметричен относительно прямой $x = m$.

4) С помощью линейного преобразования $\overset{*}{X} \triangleq (X-m)/\sigma$ нормальное распределение $\mathbf{N}(m; \sigma^2)$ переходит в стандартное нормальное $\mathbf{N}(0; 1)$ с функцией распределения $F_{\overset{*}{X}}(x) = \Phi(x)$.

5) Нормально распределенная СВ с большой вероятностью принимает значения, близкие к своему МО, что описывается «*правилом k сигм*»:

$$\mathbf{P}\{|X-m| \leqslant k\sigma\} = \Phi_0(k) - \Phi_0(-k) = 2\Phi_0(k) = \begin{cases} 0{,}6827, & k=1, \\ 0{,}9545, & k=2, \\ 0{,}9973, & k=3. \end{cases}$$

Замечание 7.3. Нормальное распределение имеет широкое распространение в прикладных задачах. Это связано с тем, что в реальности многие исследуемые СВ являются следствием различных случайных событий. В частности, при достаточно общих предположениях сумма большого числа независимых СВ имеет распределение, близкое к нормальному (см. теорему 14.2).

Пример 7.3. Рост людей хорошо описывается нормальным распределением (см. задачи 16.2 и 20.4). Это, по-видимому, связано с тем, что на рост влияет суперпозиция разнообразных независимых случайных факторов: климата, экологии, экономических условий, болезней и т. д. Хотя, конечно, «бесконечно» большие люди (великаны) и «бесконечно» маленькие люди (гномы) бывают только в сказках. Это говорит о том, что «хвосты» истинного распределения роста людей отличаются от нормального распределения.

7.4. Распределение Вейбулла.

Определение 7.4. СВ X имеет *распределение Вейбулла с параметрами* α и λ, где $\alpha>0$ и $\lambda>0$, если плотность имеет вид (рис. 7.7)

$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha\lambda x^{\alpha-1}e^{-\lambda x^{\alpha}}, & x>0, \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases}$$

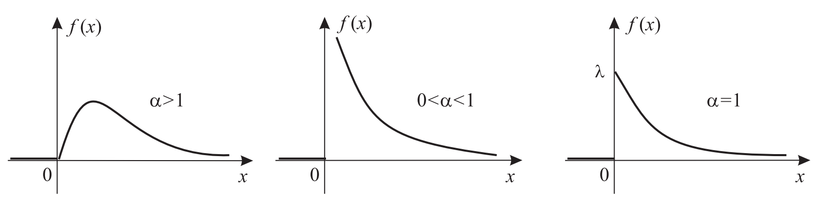

Рис. 7.7

Свойства распределения Вейбулла

1) Непосредственные вычисления показывают, что (рис. 7.8)

$$F_X(x) \triangleq \int\limits_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \begin{cases} 1-e^{-\lambda x^{\alpha}}, & x \geqslant 0, \\ 0, & x<0. \end{cases}$$

2) Приведем формулы для МО и дисперсии:

$$m_X = \lambda^{-1/\alpha}\Gamma\Big(\frac{\alpha+1}{\alpha}\Big), \quad d_X = \lambda^{-2/\alpha}\Big\{\frac{2}{\alpha}\Gamma\Big(\frac{2}{\alpha}\Big) - \frac{1}{\alpha^2}\Big[\Gamma\Big(\frac{1}{\alpha}\Big)\Big]^2\Big\},$$

где $\Gamma(x) \triangleq \int\limits_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$ — *гамма-функция*, значения которой задаются таблично.

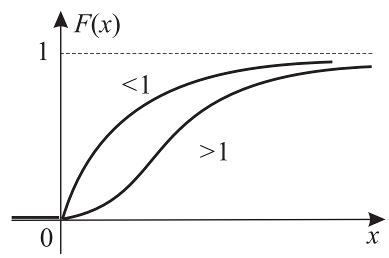

Рис. 7.8

3) Если $\alpha = 1$, то распределение Вейбулла превращается в экспоненциальное распределение с показателем λ.

Замечание 7.4. СВ, имеющая распределение Вейбулла, встречается в задачах надежности при оценке времени безотказной работы прибора.

7.5. Логарифмически нормальное распределение.

Определение 7.5. СВ $Y \triangleq e^X$, где $X \sim \mathbf{N}(m;\sigma^2)$, имеет *логарифмически нормальное* (*логнормальное*) *распределение* с параметрами m и $\sigma^2 > 0$.

Так как e^x — строго возрастающая функция, то учитывая выражение для плотности нормального распределения, находим плотность логнормального распределения:

$$f_Y(y) = f_X(\psi(y))\psi'(y) = \left\| \begin{array}{l} \psi(y) = \ln y \\ \psi'(y) = 1/y \end{array} \right\| = \\ = \begin{cases} \dfrac{1}{y\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\Big(-\frac{(\ln y - m)^2}{2\sigma^2}\Big), & y > 0, \\ 0, & y \leqslant 0. \end{cases}$$

График функции $f_Y(y)$ (рис. 7.9) асимметричен с максимумом в точке $y = e^{m-\sigma^2}$.

Найдем МО и дисперсию СВ Y. По определению

$$\mathbf{M}[Y] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^\infty e^{-\frac{(\ln y - m)^2}{2\sigma^2}} dy = \left\| \begin{array}{l} \text{замена перем.} \\ y = e^{\sigma(t+\sigma)+m} \end{array} \right\| =$$

$$= \frac{e^{m+\sigma^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} dt = e^{m+\sigma^2/2}.$$

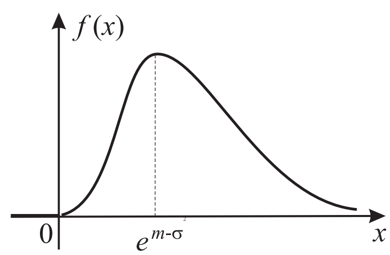

Рис. 7.9

Аналогично можно найти $\mathbf{M}[Y^2] = e^{2(\sigma^2+m)}$. Поэтому

$$\mathbf{D}[Y] = \mathbf{M}[Y^2] - \big(\mathbf{M}[Y]\big)^2 = e^{\sigma^2+2m}\Big(e^{\sigma^2} - 1\Big).$$

Замечание 7.5. Логнормальное распределение имеет широкое распространение в экономической статистике, статистической физике и биологии.

7.6. Типовые задачи.

Задача 7.1. Случайная величина $X \sim \mathbf{R}(0; a)$, $\mathbf{P}\{X > 1/3\} = 1/3$. Найти a и $\mathbf{M}[X^2]$.

Решение. Изобразив график плотности вероятности $f_X(x)$, нетрудно вычислить вероятность $\mathbf{P}\{X > 1/3\}$ как соответствующую площадь. Разрешая уравнение

$$\frac{1}{a}\left(a - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

относительно a, получаем, что $a = 1/2$. Используя теперь формулы математического ожидания и дисперсии для равномерного распределения $\mathbf{R}(0; 1/2)$, вычисляем

$$\mathbf{M}[X] = \frac{1}{4}, \qquad \mathbf{D}[X] = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{48}.$$

Наконец,

$$\mathbf{M}[X^2] = \mathbf{D}[X] + (\mathbf{M}[X])^2 = \frac{1}{48} + \frac{1}{16} = \frac{1}{12}.$$

Ответ. $a = 1/2$, $\mathbf{M}[X^2] = 1/12$.

Задача 7.2. Случайная величина $X \sim \mathbf{E}(10)$. Вычислить

$$\mathbf{P}\{X > 100|X > 10\}.$$

Решение. Воспользуемся определением условной вероятности:

$$\mathbf{P}\{X > 100|X > 10\} = \frac{\mathbf{P}\Big(\{X > 100\} \cdot \{X > 10\}\Big)}{\mathbf{P}\{X > 10\}}.$$

Поскольку $\{X > 100\} \subset \{X > 10\}$, то $\{X > 100\} \cdot \{X > 10\} = \{X > > 100\}$. Следовательно,

$$\mathbf{P}\{X > 100|X > 10\} = \frac{\mathbf{P}\{X > 100\}}{\mathbf{P}\{X > 10\}}.$$

В числителе и знаменателе перейдем к противоположным событиям. Вероятности этих событий найдем, используя функцию распределения экспоненциального закона,

$$\mathbf{P}\{X > 100\} = 1 - \mathbf{P}\{X \leqslant 100\} = 1 - F_X(100) = e^{-10\cdot 100},$$

$$\mathbf{P}\{X > 10\} = 1 - \mathbf{P}\{X \leqslant 10\} = 1 - F_X(10) = e^{-10\cdot 10}.$$

Таким образом,

$$\mathbf{P}\{X > 100|X > 10\} = \frac{e^{-1000}}{e^{-100}} = e^{-900} = \mathbf{P}\{X > 90\}.$$

Ответ. $\mathbf{P}\{X > 100|X > 10\} = \mathbf{P}\{X > 90\} = e^{-900}$.

Задача 7.3. Случайная величина $X \sim \mathbf{N}(10; 20)$. При каких h равенство

$$\mathbf{P}\left\{|X - \mathbf{M}[X]| < h\sqrt{\mathbf{D}[X]}\right\} = \mathbf{P}\left\{|X - \mathbf{M}[X]| \geqslant h\sqrt{\mathbf{D}[X]}\right\}$$

будет верно?

Решение. Пусть $A = \left\{|X - \mathbf{M}[X]| < h\sqrt{\mathbf{D}[X]}\right\}$, тогда

$$\overline{A} = \left\{|X - \mathbf{M}[X]| \geqslant h\sqrt{\mathbf{D}[X]}\right\},$$

и потому имеем

$$\mathbf{P}\left\{|X-\mathbf{M}[X]| \geqslant h\sqrt{\mathbf{D}[X]}\right\} = 1-\mathbf{P}\left\{|X-\mathbf{M}[X]| < h\sqrt{\mathbf{D}[X]}\right\}.$$

Вероятность $\mathbf{P}\{|X - \mathbf{M}[X]| < h\sqrt{\mathbf{D}[X]}\}$ согласно свойству 5) $\mathbf{N}(m;\sigma^2)$, может быть вычислена с помощью функции Лапласа:

$$\mathbf{P}\left\{|X-\mathbf{M}[X]| < h\sqrt{\mathbf{D}[X]}\right\} = \mathbf{P}\left\{|X-\mathbf{M}[X]| < h\sigma\right\} = 2\Phi_0(h).$$

Таким образом, исходное уравнение сводится к виду

$$2\Phi_0(h) = 1 - 2\Phi_0(h),$$

откуда $\Phi_0(h) = 1/4$. По таблице 1 функции Лапласа (стр. 216) находим $h \approx 0{,}675$.

Ответ. $h \approx 0{,}675$.

Задача 7.4. Если соблюдается график движения, то среднее время ожидания пассажиром трамвая равно 3,5 минуты. Известно, что время ожидания имеет равномерный закон распределения. Минимальное время ожидания равно 0. Найти вероятность того, что пассажир будет ожидать трамвай от двух до пяти минут.

Решение. Обозначим время ожидания трамвая через X. Согласно условию задачи $X \sim \mathbf{R}(a;b)$, где $a = 0$, а $\mathbf{M}[X] = 3{,}5$. Найдем параметры закона распределения, решив следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \mathbf{M}[X] = \dfrac{a+b}{2} = 3{,}5; \\ a = 0. \end{cases}$$

Получаем, что второй параметр закона распределения $b = 7$. Тогда

$$\mathbf{P}\{2 \leqslant X \leqslant 5\} = \int\limits_2^5 f(x)\,dx,$$

где

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{7}, & x \in [0,7], \\ 0, & x \notin [0,7]. \end{cases}$$

Получаем

$$\mathbf{P}\{2 \leqslant X \leqslant 5\} = 3/7.$$

Ответ. $\mathbf{P}\{2 \leqslant X \leqslant 5\} = 3/7$.

Задача 7.5. Время ремонта и обслуживания автомобиля после одной поездки случайно и имеет экспоненциальный закон распределения. Было замечено, что в текущем сезоне на ремонт и обслуживание автомобиля после одной поездки тратилось в среднем 5 минут. Найти вероятность того, что при очередной поездке это время не превысит 30 минут.

Решение. Пусть X — время ремонта и обслуживания автомобиля после одной поездки. По условию задачи $X \sim \mathbf{E}(\lambda)$ и $\mathbf{M}[X] = 5$. По формуле связи $\mathbf{M}[X]$ и λ получаем, что $\mathbf{M}[X] = \dfrac{1}{\lambda} = 5$. Отсюда находим $\lambda = 1/5$. Требуется найти $\mathbf{P}\{X \leqslant 30\}$. Плотность вероятности СВ X имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{5}\, e^{-x/5}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases}$$

Следовательно, получаем

$$\mathbf{P}\{X \leqslant 30\} = \int\limits_0^{30} \frac{1}{5}\, e^{-x/5} dx = -e^{-x/5}\Big|_0^{30} = 1 - e^{-6}.$$

Ответ. $\mathbf{P}\{X \leqslant 30\} = 1 - e^{-6}$.

Задача 7.6. Рост взрослого мужчины удовлетворительно описывается нормальным законом распределения. По статистике средний рост составляет 175 см, а среднеквадратическое отклонение равно 7 см. Найти вероятность того, что рост наугад взятого мужчины будет отличаться от среднего роста не больше чем на 7 см.

Решение. Обозначим рост наугад взятого взрослого мужчины через X. По условию задачи $X \sim \mathbf{N}(175; 49)$. Требуется найти $\mathbf{P}\{|X - \mathbf{M}[X]| \leqslant 7\}$. Так как интервал $(\mathbf{M}[X] - 7, \mathbf{M}[X] + 7)$ симметричен относительно $\mathbf{M}[X]$, то

$$\mathbf{P}\{|X - \mathbf{M}[X]| \leqslant 7\} = 2\Phi_0\left(\frac{7}{\sqrt{\mathbf{D}[X]}}\right) = 2\Phi_0(1) \approx 2 \cdot 0{,}3413 = 0{,}6826.$$

Ответ. Искомая вероятность приблизительно равна $0{,}6826$.

§ 8. Задачи для самостоятельного решения

1. Функция распределения СВ X непрерывна. Может ли СВ X быть дискретной СВ?

2. СВ X принимает два значения -10 и 10 с вероятностями $1/3$ и $2/3$ соответственно. Является ли она непрерывной СВ?

3. СВ X принимает только два различных значения a $(a > 0)$ и $-a$ с вероятностью 1/2. Верно ли, что $\mathbf{M}[X] > a$ и $\mathbf{D}[X] < a^2$?

4. Закон распределения случайной величины X выглядит следующим образом (см. табл. 8.1). Построить ряды распределения и найти математические ожидания следующих случайных величин:

Таблица 8.1

X	$-0{,}5$	0	0,5	1	1,5
P	0,1	0,4	0,1	0,3	0,1

а) $Y = 10X - 1$; *б*) $Y = -X^2$; *в*) $Y = 2^X$.

5. СВ $X \sim \mathbf{Bi}(4; 1/3)$. Найти наиболее и наименее вероятные значения X.

6. СВ $X \sim \mathbf{Bi}(n; p)$, $Y \sim \mathbf{\Pi}(\lambda)$. Сравнить $\mathbf{M}[X] \cdot \mathbf{D}[Y]$ и $\mathbf{M}[Y] \times \mathbf{D}[X]$.

7. СВ $X \sim \mathbf{Bi}(8; 1/3)$, $Y \sim \mathbf{\Pi}(1/3)$. Вычислить разность между наиболее вероятными значениями СВ X и Y.

8*. Для СВ X и Y заданы ряды распределений (см. табл. 8.2 и 8.3).

Таблица 8.2

X	-1	0
P	1/2	1/2

Таблица 8.3

Y	0	1
P	1/2	1/2

Найти все x, для которых справедливо равенство $F_X(F_Y(x)) = F_Y(F_X(x))$.

9. СВ X принимает только два различных значения 1 и -1 с вероятностью 1/2. Вычислить $F_X(1/2)$ и $F_X(-1/2)$.

10. СВ $X \sim \mathbf{Bi}(1; 0{,}2)$. Как распределена СВ $Y = 1 - X^n$?

11. СВ $X \sim \mathbf{Bi}(1; 1/2)$. Сравнить $(\mathbf{M}[X])^2$ и $\mathbf{D}[X]$.

12. СВ $X \sim \mathbf{Bi}(4; 0{,}1)$. Найти $F_X(-10)$.

13. Существуют ли такие законы распределений дискретных случайных величин, для которых:

а) дисперсия всегда меньше математического ожидания (для любых параметров закона распределения)?

б) $\mathbf{D}[X] = \mathbf{M}[X]$?

14. СВ $X \sim \mathbf{Bi}(3; 0{,}2)$. Вычислить $\mathbf{P}\{X > 0\}$.

15. СВ $X \sim \mathbf{\Pi}(1)$. Найти наиболее вероятное значение X.

16. СВ $X \sim \mathbf{\Pi}(23)$, а $Y = 1 - X$. Вычислить $F_Y(2)$.

17. СВ $X \sim \mathbf{\Pi}(\mathbf{M}[Y])$, а СВ $Y \sim \mathbf{\Pi}(\mathbf{M}[X])$. Сравнить $\mathbf{D}[X]$ и $\mathbf{D}[Y]$.

18. Функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ являются плотностями вероятностей. Является ли функция $f_3(x) = (f_1(x) + 2f_2(x))/3$ плотностью вероятности?

19. СВ $X \sim \mathbf{R}(-1;1)$. Сравнить $\mathbf{P}\{X < \mathbf{M}[X]\}$ и $\mathbf{P}\{X > \mathbf{M}[X]\}$. Найти $\mathbf{P}\big\{|X - \mathbf{M}[X]| < \sqrt{\mathbf{D}[X]}\big\}$.

20. СВ $X \sim \mathbf{R}(-1;0)$, а $Y \sim \mathbf{R}(0;1)$. Сравнить $F_X(F_Y(1/2))$ и $F_Y(F_X(1/2))$.

21. СВ $X \sim \mathbf{E}(1)$. Сравнить $\mathbf{P}\{X < \mathbf{M}[X]\}$ и $\mathbf{P}\{X < \mathbf{D}[X]\}$.

22. СВ $X \sim \mathbf{E}(\mathbf{M}[Y])$, $Y \sim \mathbf{E}(\mathbf{D}[X])$. Найти $\mathbf{M}[X]$, $\mathbf{D}[X]$, $\mathbf{M}[Y]$ и $\mathbf{D}[Y]$.

23. СВ $X \sim \mathbf{N}(0;1)$, а $Y \sim \mathbf{R}(0;1)$. Сравнить $\mathbf{P}\{0 < X < 1\}$ и $\mathbf{P}\{0 < Y < 1\}$.

24. Пятнадцать раз подбрасывали три игральных кости. Пусть случайная величина X — число подбрасываний, при которых ровно на двух костях появилось по одному очку. Определить закон распределения случайной величины X.

25. После полета самолет проходит технический осмотр и обслуживание. Число неисправностей, обнаруженных во время технического осмотра, распределяется по закону Пуассона с параметром $a = 1$. Если неисправностей не обнаружено, то техническое обслуживание продолжается в среднем два часа. Если обнаружены одна или две неисправности, то на устранение каждой из них тратится еще по полчаса. Если обнаружено больше двух неисправностей, то самолет ставится на профилактический ремонт, где он находится в среднем четыре часа. Найти закон распределения среднего времени T послеполетного обслуживания и ремонта самолета, а также математическое ожидание времени послеполетного обслуживания. Построить график функции распределения.

26. В среднем каждый второй автомобиль ВАЗ способен пройти первые 10 тыс. км без серьезных поломок, требующих гарантийного ремонта. Организация, торгующая автомобилями, заключила договор с автосервисом на гарантийное обслуживание проданных автомобилей. Согласно договору, организация выплачивает сервису 10 тыс. рублей по факту каждого обращения. Последующее гарантийное обслуживание берет на себя сервис. Прибыль компании от продажи одного автомобиля составляет 15 тыс. рублей без учета отчислений на гарантийный ремонт. Дать ответы на вопросы:

а) Какова средняя прибыль компании от продажи десяти автомобилей?

б) Какое минимальное количество автомобилей нужно продать организации за месяц, чтобы средняя месячная прибыль (с учетом выплат по гарантии) была бы не ниже 300 тыс. рублей?

в) Какова наиболее вероятная окончательная прибыль компании (с учетом выплат по гарантии) от продажи 10 автомобилей?

27. У торгового агента имеется пять адресов потенциальных покупателей, к которым он обращается по списку с предложением приобрести реализуемый фирмой товар. Вероятность согласия потенциальных покупателей оценивается соответственно как $0{,}5$, $0{,}4$, $0{,}4$, $0{,}3$ и $0{,}25$. Покупатели принимают решение о покупке товара независимо друг от друга. Агент обращается к ним в указанном порядке пока кто-нибудь из них не согласится приобрести товар. Составить ряд распределения СВ X — числа покупателей, к которым обратится агент. Найти математическое ожидание и дисперсию этой величины.

28. Заявки, рассылаемые фирмой, удовлетворяются примерно в 30% случаев независимо друг от друга. Фирма разослала 200 заявок. Найти:

а) математическое ожидание и дисперсию числа удовлетворенных заявок X;

б) $\mathbf{P}\{X = [m_X]\}$, где $[\,\cdot\,]$ — целая часть числа.

29. Случайным образом из колоды карт (36 карт) последовательно выкладывают на стол карты лицевой стороной вверх. На карты первой колоды таким же образом кладут сверху карты второй колоды (36 карт). Найти среднее число совпадений карт верхней и нижней колоды.

30. Вероятность того, что при трех независимых выстрелах стрелок попадет в цель хотя бы один раз, равна $0{,}992$. Найти математическое ожидание и дисперсию числа попаданий при двадцати выстрелах.

31. Лотерея заключается в розыгрыше трех номеров из шести. Порядок выпадения выигрышных номеров неважен. Выигрыш при угадывании одного номера из трех составляет 20 рублей, двух номеров из трех — 100 рублей, всех трех номеров — 500 рублей. Найти средний выигрыш при покупке одного билета лотереи. Построить график функции распределения размера выигрыша.

32. Необходимо исследовать 10 тыс. проб руды. Вероятность промышленного содержания металла в каждой пробе руды равна $0{,}2$. Определить математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение числа проб с промышленным содержанием металла.

33. Плотность вероятности случайной величины X имеет следующий вид:

$$f(x) = \begin{cases} 3h, & x \in [-1, 0], \\ h, & x \in [1, 2], \\ 0 - & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Найти h, функцию распределения $F(x)$ СВ X, $\mathbf{M}[(2-X)(X-3)]$ и $\mathbf{D}[2-3X]$.

34. Станок-автомат изготавливает валики. Контролируется их диаметр X, удовлетворительно описываемый гауссовским законом распределения со средним значением $m = 10$ мм. Каково среднеквадратическое отклонение диаметра валика, если с вероятностью $0,99$ он заключен в интервале $(9{,}7,\ 10{,}3)$?

35. Время X безотказной работы станка имеет экспоненциальное распределение. Вероятность того, что станок не откажет за 5 часов работы, равна 0,60653. Найти $\mathbf{M}[X]$, $\mathbf{D}[X]$, $\mathbf{M}[X^2]$.

36. Случайная величина X имеет гауссовское распределение вероятностей со средним значением 25. Вычислить вероятность попадания этой СВ в интервал $(35, 40)$, если она попадает в интервал $(20, 30)$ с вероятностью 0,2.

37. Найти p-квантиль распределения $\mathbf{R}(a; b)$.

38. Если $f(x)$ — плотность вероятности, то будет ли функция $f(-x)$ плотностью вероятности?

39. СВ $X \sim \mathbf{R}(-1; 0)$, а $Y \sim \mathbf{R}(0; 1)$. Сравнить $F_X(f_Y(\mathbf{M}[X]))$ и $F_Y(f_X(\mathbf{M}[Y]))$.

40. СВ $X \sim \mathbf{E}(1)$. Вычислить $\mathbf{P}\{0 < X < 1\}$.

41. СВ $X \sim \mathbf{E}(1)$. Сравнить $F_X(\mathbf{M}[X])$ и $f_X(\mathbf{M}[X])$, $F_X(-\mathbf{M}[X])$ и $f_X(-\mathbf{M}[X])$.

42. СВ $X \sim \mathbf{N}(0; 1)$. Вычислить $\mathbf{M}[X^3]$.

43. СВ $X \sim \mathbf{N}(2; 1)$. Сравнить $\mathbf{P}\{X < \mathbf{M}[X]\}$ и $\mathbf{P}\{X > \mathbf{D}[X]\}$.

44. СВ $X \sim \mathbf{N}(\pi; e)$. Вычислить $F_X(\mathbf{M}[X])$.

45. Функция распределения СВ X имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-2x}, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Найти $\mathbf{M}[(X-4)(5-X)]$, $\mathbf{P}\{X \leqslant \mathbf{M}[X]\}$ и $\mathbf{D}[3-2X]$.

46. Плотность вероятности СВ X имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} cx, & x \in [0, 1], \\ 0, & x \notin [0, 1]. \end{cases}$$

Найти константу c, $\mathbf{M}[X]$, $\mathbf{D}[X]$, $\mathbf{P}\{0{,}5 < X < 2\}$. Построить график функции распределения $F_X(x)$.

47. Заданы две СВ $X \sim \mathbf{R}(0;1)$ и $Y \sim \mathbf{E}(1)$. Сравнить вероятности того, что каждая из них не превышает по модулю 2.

48. СВ X имеет плотность вероятности

$$f(x) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-12)^2}{18}\right\}.$$

Какова вероятность того, что X попадет в интервал $(0,12)$? Чему равен второй начальный момент этой СВ? Найти $\mathbf{D}[5-3X]$.

49. Известно, что среднее время ожидания очередного покупателя, подошедшего к кассе, равно 0,2 минуты. Время ожидания кассиром очередного покупателя можно считать СВ, имеющей показательный закон распределения. Кассиру нужно сменить ленту кассового аппарата. На это ему требуется две минуты. Какова вероятность того, что за это время не образуется очередь?

50. Автомат изготавливает шарики для подшипников. Шарик считается принятым, если отклонение X диаметра шарика от заданного размера по абсолютной величине меньше 0,7 мм. СВ X можно считать нормально распределенной с нулевым средним и среднеквадратическим отклонением $\sigma = 0{,}4$. Сколько в среднем будет годных шариков из 50 изготовленных?

51. СВ $X \sim \mathbf{R}(-1;8)$. Найти точку, в которой функция распределения равна 1/3.

52. СВ X имеет функцию распределения

$$F(x) = \begin{cases} 1 - 1/x, & x \geqslant 1, \\ 0, & x < 1. \end{cases}$$

Найти a, для которого $\mathbf{P}\{X > a\} = 1/3$.

53. Найти p-квантиль экспоненциального закона распределения с параметром λ.

54. Функция распределения непрерывной СВ X определяется формулой

$$F(x) = c + b \operatorname{arctg} \frac{x}{a}.$$

Найти:

а) постоянные a, b и c;

б) плотность вероятности СВ X.