Министерство образования Российской Федерации

Ульяновский государственный технический университет

ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ.

РЯДЫ ФУРЬЕ.

Ульяновск 2003

УДК 517(076)
ББК 2.193 я 7
Ч-67

Рецензент канд.физ.-мат.наук, доцент Ш. Т. Ишмухаметов

Одобрено секцией методических пособий научно- методического совета университета

Числовые и функциональные ряды. Ряды Фурье: Методические указания к типовому расчету по высшей математике / Сост.: М. Е. Чумакин, Г. Д. Павленко.─ Ульяновск:УлГТУ, 2003.─ 39с.

Работа подготовлена на кафедре «Высшая математика»

Настоящие методические указания составлены в соответствии с программами курса высшей математики для студентов младших курсов всех специальностей УлГТУ.

Изложена методика выполнения типового расчета по числовым и функциональным рядам и рядам Фурье, даны образцы решения задач с предварительным теоретическим обоснованием.

УДК 517(076)
ББК 2.193 я 7

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В целях лучшего усвоения курса математики и интенсификации самостоятельных занятий студентов в программах по высшей математике предусмотрено выполнение типовых расчетов. Каждый типовой расчет должен быть заданием по целому разделу курса и состоять из теоретических вопросов, теоретических упражнений, задач и примеров. Теоретические вопросы и теоретические упражнения должны быть общими для всех студентов, примеры и задачи ─ индивидуальными.

Предлагаемые методические указания являются руководством для выполнения типового расчета по теме «Ряды» из учебного пособия Л. А. Кузнецова «Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты)», который удовлетворяет вышеуказанным требованиям программы к типовым расчетам. В связи с отсутствием в указанном сборнике Л. А. Кузнецова рядов Фурье в данное пособие включены задания по рядам Фурье.

Сначала предлагается найти ответы на теоретические вопросы в учебниках [1-3] и в конспектах лекций, а затем выполнять теоретические упражнения и решать задачи и примеры. Выполнение теоретических упражнений и решение задач и примеров помогут приобрести студентам первоначальные навыки в научно-исследовательской работе по математике и в решении прикладных задач.

Все примеры указаний имеют двойную нумерацию. Например, номера 1.1 и 1.2 означают, что они даны к задаче 1 сборника Л. А. Кузнецова, примеры 2.1 и 2.2 даны к задаче 2 и т.д.

2. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

2.1.Указания к задаче 1

Пусть $a_1, a_2, ..., a_n, ...,$ ─ заданная числовая последовательность. Выражение

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1.1}$$

называется числовым рядом. Конечные суммы

$$S_1 = a_1, \quad S_2 = a_1 + a_2, ..., \quad S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n, ... \tag{1.2}$$

называются частичными суммами ряда (1.1).

Если существует конечный предел последовательности частичных сумм (1.2) $S = \lim\limits_{n \to \infty} S_n$, то ряд (1.1) называется *сходящимся*, а число S ─ *суммой ряда* (1.1).

Если ряд (1.1) сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ (необходимый признак сходимости).

Пример 1.1. Найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{14}{49n^2-70n-24}. \qquad (1.3)$$

Решение. Сначала решим уравнение

$$49x^2-70x-24=0.$$

Корнями этого уравнения являются числа $x_1=-\frac{2}{7}$ и $x_2=\frac{12}{7}$, следовательно,

$$49x^2-70x-24=49\left(x+\frac{2}{7}\right)\left(x-\frac{12}{7}\right)=(7x+2)(7x-12).$$

Теперь методом неопределенных коэффициентов выражение $\frac{14}{49x^2-70x-24}$ разложим на простейшие дроби:

$$\frac{14}{49x^2-70x-24}=\frac{14}{(7x+2)(7x-12)}=\frac{A}{7x+2}+\frac{B}{7x-12},$$

откуда

$$A(7x-12)+B(7x+2)=14.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 7A+7B=0, \\ -12A+2B=14, \end{cases}$$

из которой находим: A=-1 и B=1, следовательно,

$$\frac{14}{49x^2-70x-24}=\frac{1}{7x-12}-\frac{1}{7x+2}. \qquad (1.4)$$

Учитывая (1.4), частичную сумму ряда (1.3) можно записать следующим образом:

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{14}{49k^2-70k-24}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{7k-12}-\frac{1}{7k+2}\right)=-\frac{1}{5}-\frac{1}{9}+\frac{1}{2}-\frac{1}{16}+\frac{1}{9}-\frac{1}{23}+$$

$$+\frac{1}{16}-\frac{1}{30}+\frac{1}{23}-\frac{1}{37}+\ldots+\frac{1}{7(n-2)-12}-\frac{1}{7(n-2)+2}+\frac{1}{7(n-1)-12}-\frac{1}{7(n-1)+2}+$$

$$+\frac{1}{7n-12}-\frac{1}{7n+2}=-\frac{1}{5}+\frac{1}{2}-\frac{1}{7(n-1)+2}-\frac{1}{7n+2}=\frac{3}{10}-\frac{1}{7n-5}-\frac{1}{7n+2},$$

следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{10}-\frac{1}{7n-5}-\frac{1}{7n+2}\right)=0{,}3.$$

Значит, ряд (1.3) сходится и его сумма $S=0{,}3$.

2.2 Указания к задаче 2

Задача 2 решается аналогично задаче 1.

Пример 2.1. Найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+8}{n(n+1)(n+2)}. \qquad (2.1)$$

Решение. Методом неопределенных коэффициентов общий член ряда (2.1) разложим на простейшие дроби

$$\frac{3n+8}{n(n+1)(n+2)} = \frac{4}{n} - \frac{5}{n+1} + \frac{1}{n+2} = 4\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) - \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right).$$

Тогда частичную сумму ряда (2.1) можно записать в виде

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{3k+8}{k(k+1)(k+2)} = 4\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) - \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) =$$

$$= 4\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) -$$

$$-\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = 4\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right) =$$

$$= 3{,}5 - \frac{4}{n+1} + \frac{1}{n+2},$$

значит,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(3{,}5 - \frac{4}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) = 3{,}5\ ,$$

следовательно, ряд (2.1) сходится и имеет сумму $S = 3{,}5$.

2.3 Указания к задаче 3

Ряд

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (3.1)$$

называют *абсолютно сходящимся,* если сходится ряд

$$|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\,. \qquad (3.2)$$

Если ряд (3.1) сходится, а ряд (3.2) расходится, то ряд (3.1) называется условно *сходящимся.*

Если члены ряда (3.1) для всех номеров n , начиная с некоторого, удовлетворяют условию $|a_n| \le b_n$, причем знакоположительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то ряд (3.1) сходится абсолютно. Если для всех номеров n , начиная с некоторого, члены ряда (3.1) удовлетворяют условию $0 < c_n \le a_n$, причем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ расходится, то ряд (3.1) также расходится (признак сравнения).

Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n$ сходится абсолютно и существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{d_n}\right| = q < +\infty$, то ряд (3.1) сходится абсолютно. Если члены рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ положительны и $0 < \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} < +\infty$, то эти ряды либо оба сходятся, либо оба расходятся (предельный признак сравнения).

Пример 3.1. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(3+2\cos\dfrac{n\pi}{2}\right)\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt[6]{n^{11}+10}}. \tag{3.3}$$

Решение. Так как $|\cos x| \le 1,\quad \sqrt[6]{n^{11}+10} > \sqrt[6]{n^{11}}$, то

$$0<\frac{\left(3+2\cos\dfrac{n\pi}{2}\right)\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt[6]{n^{11}+10}}<\frac{5\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt[6]{n^{11}}}=\frac{5}{n^{7/6}} \tag{3.4}$$

Обобщенный гармонический ряд (ряд Дирихле) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\alpha}}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \le 1$. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5}{n^{7/6}}$ сходится. Поэтому, в силу соотношения (3.4), ряд (3.3) также сходится.

Пример 3.2. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^3+2}}{n^2\sin^2 n}. \tag{3.5}$$

Решение. Так как

$$\frac{\sqrt{n^3+2}}{n^2\sin^2 n} > \frac{n^{3/2}}{n^2} = \frac{1}{n^{1/2}}$$

и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{1/2}}$ расходится , то ряд (3.5) также расходится.

Пример 3.3. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{arctg\sqrt{n^2-3}}{\sqrt{n^2-4n}}. \qquad (3.6)$$

Решение. Гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится и

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{arctg\sqrt{n^2-3}}{\sqrt{n^2-4n}}:\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(arctg\sqrt{n^2-3}\cdot\frac{n}{\sqrt{n^2-4n}}\right)=\frac{\pi}{2},$$

следовательно, ряд (3.6) расходится.

2.4. Указания к задаче 4

Задачу 4 можно решить, пользуясь предельным признаком сравнения.

Пример 4.1. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin\frac{n}{\left(n^2+3\right)^{5/2}}. \qquad (4.1)$$

Решение. Так как $\arcsin\frac{n}{\left(n^2+3\right)^{5/2}}\sim\frac{n}{\left(n^2+3\right)^{5/2}}$ при $n\to\infty$, то

$$\lim_{n\to\infty}\left(\arcsin\frac{n}{\left(n^2+5\right)^{5/2}}:\frac{1}{n^4}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{\left(n^2+3\right)^{5/2}}:\frac{1}{n^4}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^5}{\left(n^2+3\right)^{5/2}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{3}{n^2}\right)^{5/2}}=1.$$

Кроме того, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ сходится, следовательно, ряд (4.1) также сходится.

Пример 4.2. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{2^n\left(2^n-1\right)}. \tag{4.2}$$

Решение. Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{4}\right)^n$ расходится и

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5^n}{2^n\left(2^n-1\right)}:\left(\frac{5}{4}\right)^n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{2^n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{2^n}}=1,$ то ряд (4.2) также расходится.

2.5. Указания к задаче 5

Если члены ряда $a_1+a_2+...+a_n+...=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ (5.1)

таковы, что существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\ell$, то при $0\le\ell<1$ ряд (5.1) сходится абсолютно, при $\ell>1$ – расходится, а при $\ell=1$ требуется дополнительное исследование (признак Даламбера).

Пример 5.1. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot4\cdot7...(3n-2)}{2^{n+1}\cdot n!} \tag{5.2}$$

Решение. Имеем $a_n=\frac{1\cdot4\cdot7...(3n-2)}{2^{n+1}\cdot n!}$,

$$a_{n+1}=\frac{1\cdot4\cdot7...(3n-2)(3(n+1)-2)}{2^{(n+1)+1}\cdot(n+1)!}=\frac{1\cdot4\cdot7...(3n-2)(3n+1)}{2^{n+2}(n+1)!},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot4\cdot7...(3n-2)(3n+1)\cdot2^{n+1}n!}{2^{n+2}(n+1)!1\cdot4\cdot7...(3n-2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2(n+1)}=\frac{3}{2}>1,$$

следовательно, ряд (5.2) расходится.

2.6. Указания к задаче 6

Если существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\ell$, то при $0\le\ell<1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится абсолютно, при $\ell>1$ — расходится, а при $\ell=1$ — требуется дополнительное исследование (признак Коши).

Пример 6.1. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^4 arctg^{2n}\frac{\pi}{4n}. \tag{6.1}$$

Решение. Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^4 arctg^{2n}\frac{\pi}{4n}}=\lim_{n\to\infty}\left(n^{4/n}arctg^2\frac{\pi}{4n}\right)=0, \tag{6.2}$$

так как $\lim\limits_{x\to\infty}x^{1/x}=1$. Действительно, логарифмируя функцию $y=x^{1/x}$, получаем $\ln y=\dfrac{\ln x}{x}$, отсюда по правилу Лопиталя

$$\lim_{x\to+\infty}\ln y=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{1}=0,$$

следовательно, $\lim\limits_{x\to+\infty}y=e^0=1$, т.е. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{1/x}=1$.

Из равенства (6.2) следует, что ряд (6.1) сходится.

2.7. Указания к задаче 7

Если $a_n=f(n)$, где функция $f(x)$ непрерывная в промежутке $[1,\infty)$, а при $x\ge d\ge 1$ неотрицательная и невозрастающая, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ и интеграл $\int\limits_d^{\infty}f(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно (интегральный признак Коши).

Пример 7.1. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3n}{(n^2-2)\ln 2n}. \tag{7.1}$$

Решение. Рассмотрим вспомогательный ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln 2n}. \qquad (7.2)$$

Так как функция $f(x)=\dfrac{1}{x\ln 2x}$ в промежутке $[2,+\infty)$ удовлетворяет условиям интегрального признака Коши и $\dfrac{1}{n\ln 2n}=f(n)$ $(n=2,3,4,...)$, то исследование сходимости ряда (7.2) сводится к исследованию сходимости интеграла $\int\limits_{2}^{+\infty}\dfrac{dx}{x\ln 2x}$.

Но интеграл $\int\limits_{2}^{+\infty}\dfrac{dx}{x\ln 2x}=\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_{2}^{b}\dfrac{d\ln 2x}{\ln 2x}=\lim\limits_{b\to+\infty}\ln|\ln 2x|\Big|_{2}^{b}=+\infty$, следовательно, ряд (7.2) расходится.

Теперь найдем предел отношения соответствующих членов рядов (7.1) и (7.2): $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n}{\left(n^2-2\right)\ln 2n}:\dfrac{1}{n\ln 2n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2\ln 2n}{\left(n^2-2\right)\ln 2n}=3$, значит, ряд (7.1) также расходится.

2.8. Указания к задаче 8

Всякий абсолютно сходящийся ряд является сходящимся рядом. Если члены знакочередующегося ряда по абсолютной величине монотонно убывают и n-ый член стремится к нулю при $n\to\infty$, то этот ряд сходится, а его сумма имеет знак первого члена и не превосходит этого члена по абсолютной величине (признак Лейбница).

Пример 8.1. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{(\ln 4)^n}. \qquad (8.1)$$

Решение. Так как $\left|\dfrac{\sin n\alpha}{(\ln 4)^n}\right|\le\dfrac{1}{(\ln 4)^n}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(\ln 4)^n}$ является сходящимся геометрическим рядом со знаменателем $q=\dfrac{1}{\ln 4}$, то ряд (8.1) сходится абсолютно.

Пример 8.2. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^3}{(n+1)!}. \qquad (8.2)$$

Решение. Ряд из абсолютных величин членов ряда (8.2) сходится, так как

$$\lim_{n \to \infty}\left(\frac{(n+1)^3}{(n+2)!} : \frac{n^3}{(n+1)!}\right) = \lim_{n \leftarrow \infty}\frac{(n+1)^3}{n^3(n+2)} = 0 < 1.$$

Следовательно, ряд (8.2) сходится абсолютно.

Пример 8.3. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n}. \tag{8.3}$$

Решение. Члены данного знакочередующегося ряда (8.3) по абсолютной величине монотонно убывают $\frac{1}{2n} > \frac{1}{2(n+1)}$ и $\lim\limits_{n \to \infty}\frac{1}{2n} = 0$, следовательно, ряд (8.3) сходится.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$, составленный из абсолютных величин членов ряда (8.3), получается из гармонического ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ в результате умножения всех его членов на $\frac{1}{2}$. Гармонический ряд расходится, значит, указанный ряд также расходится.

Таким образом, ряд (8.3) сходится условно (неабсолютно).

2.9. Указания к задаче 9

Остаток ряда, удовлетворяющего условиям признака Лейбница, также удовлетворяет условиям этого признака. Поэтому сумма остатка такого ряда имеет знак первого члена остатка и не превосходит его по абсолютной величине. Отсюда следует, что если при вычислении суммы ряда, удовлетворяющего условиям признака Лейбница, мы ее приближенно заменяем частичной суммой, то допущенная ошибка имеет знак первого отброшенного члена и не превосходит его по абсолютной величине.

Пример 9.1 Вычислить сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{\left(1+n^3\right)^2} \tag{9.1}$$

с точностью $\alpha = 0{,}001$.

Решение. Если в качестве суммы ряда (9.1) взять сумму первых n-1 членов, то ошибка по абсолютной величине не превосходит числа $a_n = \frac{n}{\left(1+n^3\right)^2}$. Так как

$a_4 = \frac{4}{\left(1+4^3\right)^2} = \frac{4}{4225} < 0{,}001,\quad a_3 = \frac{3}{\left(1+3^3\right)^2} = \frac{3}{784} > 0{,}001$, то с точностью до 0,001 имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(1+n^3)^2}\approx\sum_{n=1}^{3}\frac{(-1)^n n}{(1+n^3)^2}=-\frac{1}{4}+\frac{2}{81}-\frac{3}{784}=-\frac{14551}{63504}.$$

Однако при записи простых дробей в десятичной форме с определенным числом знаков после запятой мы допускаем ошибки. Следовательно, общая ошибка может оказаться больше требуемой точности. Поэтому с целью улучшения точности в качестве суммы ряда (9.1) возьмем сумму первых четырех членов с четырьмя знаками после запятой (округление отбрасыванием):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{\left(1+n^3\right)^2}\approx\sum_{n=1}^{4}\frac{(-1)^n n}{\left(1+n^3\right)^2}=-\frac{1}{4}+\frac{2}{81}-\frac{3}{784}+\frac{4}{4225}\approx-0{,}2500+0{,}0246-0{,}0038+$$

$$+0{,}0009=-0{,}2283\approx-0{,}228.$$

Так как значение первого члена ряда точное и

$$a_5=\frac{5}{\left(1+5^3\right)^2}=\frac{5}{15876}<0{,}0004,$$

то вся ошибка по абсолютной величине меньше, чем

$$0{,}0003+3\cdot0{,}0001+0{,}0004=0{,}001.$$

Таким образом, с точностью $\alpha=0{,}001$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(1+n^3)^2}\approx-0{,}228.$$

Отметим, что с целью уменьшения ошибки вычислений можно было округлять по правилам округления, а не отбрасыванием.

2.10. Указания к задаче 10

В задаче 10 следует доказать равенство вида $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0.$

С этой целью можно рассматривать ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$. Если этот ряд сходится, то $\lim a_n=0.$

Пример 10.1. Доказать справедливость равенства

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{(2n)!!}. \qquad (10.1)$$

Доказательство. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{(2n)!!} \qquad (10.2)$$

с общим членом $a_n=\dfrac{n^2+1}{(2n)!!}$. Вычислим предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left((n+1)^2+1\right)\cdot(2n)!!}{(2(n+1))!!\left(n^2+1\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+2}{2(n+1)\left(n^2+1\right)}=0<1.$$

Следовательно, по признаку Даламбера ряд (10.2) сходится, значит, $\lim_{n\to\infty} a_n=0$, т.е. имеет место равенство (10.1).

3.ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

3.1. Указания к задаче 11

Пусть функции $U_n(x),\quad n\in N$, определены в области D. Выражение

$$U_1(x)+U_2(x)+\ldots+U_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}U_n(x),\quad x\in D \tag{11.1}$$

называется функциональным рядом.

Если для $x_0\in D$ числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}U_n\left(x_0\right)$ сходится, то говорят, что функциональный ряд (11.1) сходится в точке $\boldsymbol{x_0}$.

Если функциональный ряд (11.1) сходится в каждой точке $\boldsymbol{x\in E\subset D}$, то этот ряд называется *сходящимся на множестве E.*

Если на множестве $E\subset D$ сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|U_n(x)|$, то ряд (11.1) называется *абсолютно сходящимся на множестве* E.

Для определения области абсолютной сходимости ряда (11.1) следует воспользоваться либо признаком Даламбера, либо признаком Коши. Если

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right|=\ell(x)$$

или

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|U_n(x)|}=\ell(x),$$

то для определения области абсолютной сходимости ряда (11.1) следует решить функциональное неравенство $\ell(x)<1$, а для определения области расходимости – неравенство $\ell(x)>1$. Для выяснения сходимости ряда в точках, в которых $\ell(x)=1$, требуется дополнительное исследование.

Пример 11.1. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{1+x^{2n+1}}\ . \tag{11.2}$$

Решение. Члены $U_n(x)=\dfrac{x^{2n}}{1+x^{2n+1}}$ ряда (11.2) не определены при $x=-1$. Предположим $x\neq-1$ и найдем предел

$$\ell(x)=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2(n+1)}}{1+x^{2(n+1)+1}}:\frac{x^{2n}}{1+x^{2n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^2+x^{2n+3}}{1+x^{2n+3}}\right|=$$

$$=\begin{cases} x^2 \quad \text{при} \quad |x|<1, \\ 1 \quad \text{при} \quad x=1 \quad \text{или} \quad |x|>1. \end{cases}$$

Следовательно, области абсолютной сходимости ряда (11.2) будут принадлежать значения $\boldsymbol{x}$, удовлетворяющие системе

$$\begin{cases} |x|<1, \\ x^2<1, \end{cases}$$

значит, $-1<x<1$, а при $x=1$ или $|x|>1$ требуется дополнительное исследование.

Так как

$$\lim_{n\to\infty} U_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{1+x^{2n+1}}=\begin{cases} \dfrac{1}{2} \quad \text{при} \quad x=1, \\ \dfrac{1}{x} \quad \text{при} \quad |x|>1, \end{cases}$$

отличен от нуля, то при любом фиксированном $|\boldsymbol{x}|>\mathbf{1}$ или $\boldsymbol{x}=\mathbf{1}$ ряд (11.2) расходится.

Таким образом, ряд (11.2) абсолютно сходится в точках интервала (-1,1), а во всех остальных точках расходится.

Пример 11.2. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n. \tag{11.3}$$

Решение. Члены $U_n(x)=\dfrac{n}{n+1}\left(\dfrac{x}{2x+1}\right)^n$ ряда (11.3) определены для всех $x\neq-\dfrac{1}{2}$. Так как

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|U_n(x)|}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\dfrac{n}{n+1}\left(\dfrac{x}{2x+1}\right)^n\right|}=\left|\dfrac{x}{2x+1}\right|$, то ряд (11.3) сходится абсолютно при $\left|\dfrac{x}{2x+1}\right|<1$.

Решениями последнего неравенства являются решения системы неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2x+1}<1, \\ \dfrac{x}{2x+1}>-1. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем, что ряд (11.3) сходится абсолютно при $x<-1$ или $x>-\dfrac{1}{3}$.

При $x=-1$ и $x=-\dfrac{1}{3}$ соответственно получаем числовые ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{n+1}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n}{n+1}$, которые расходятся.

Итак, ряд (11.3) сходится при $x \in (-\infty,-1) \bigcup \left(-\frac{1}{3},\infty\right)$, притом абсолютно.

Пример 11.3. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n+x^2}. \tag{11.4}$$

Решение. Члены ряда (11.4) определены для всех $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}$. При $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ ряд (11.4) сходится. Покажем, что при любом $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ он расходится. Действительно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+x^2}$ расходится, так как $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+x^2} : \frac{1}{n}\right)=1$.

Следовательно, данный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n+x^2} = x\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+x^2}$$

также расходится при $x \neq 0$.

3.2. Указания к задаче 12

Задача 12 решается аналогично задаче 11.

Пример 12.1. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n}}{\sqrt[4]{2n}} x^{2n} \sin(x-n\pi) . \tag{12.1}$$

Решение. Учитывая справедливость равенства

$$\sin(x-n\pi)=(-1)^n \sin x, \quad n \in N,$$

общий член ряда (12.1) можно переписать в виде

$$U_n(x)=\frac{(-1)^n 3^{2n}}{\sqrt[4]{2n}} x^{2n} \sin x .$$

Так как

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}3^{2(n+1)}}{\sqrt[4]{2(n+1)}} x^{2(n+1)} \sin x : \frac{(-1)^n 3^{2n}}{\sqrt[4]{2n}} x^{2n} \sin x\right| = 9x^2,$$

то ряд (12.1) абсолютно сходится при $9x^2<1$, т.е. при $|x|<\frac{1}{3}$. При $x=\frac{1}{3}$ получаем знакочередующийся числовой ряд

$$\sin\frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[4]{2n}}, \tag{12.2}$$

который, по теореме Лейбница, сходится. Но ряд, составленный из абсолютных величин членов ряда (12.2), расходится, значит, ряд (12.2) сходится условно. При $x=-\frac{1}{3}$ получаем ряд $\sin\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[4]{2n}}$, который также сходится условно.

Итак, ряд (12.1) сходится при $x \in \left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$, притом абсолютно при $x \in \left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

Пример 12.2. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\cdot 3^{n/2}}{\sqrt{n}}tg^n 2x\,. \qquad (12.3)$$

Решение. Члены ряда (12.3)

$$U_n(x)=\frac{4\cdot 3^{n/2}}{\sqrt{n}}tg^n 2x$$

определены для $x\neq\frac{\pi}{4}(2k+1),\ k\in Z$. При этих значениях x имеем

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|U_n(x)\right|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{4\cdot 3^{n/2}}{\sqrt{n}}tg^n 2x\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{4^{1/n}3^{1/2}}{n^{1/2n}}\left|tg2x\right|=\sqrt{3}\left|tg2x\right|,$$

так как $\lim\limits_{n\to\infty}n^{1/2n}=1$ (см. решение примера 6.1). Следовательно, ряд (12.3) сходится абсолютно, если $\sqrt{3}\left|tg2x\right|<1$, т.е. $-\frac{1}{\sqrt{3}}<tg2x<\frac{1}{\sqrt{3}}$, значит, $-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}k<x<\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}k,\ k\in Z$. При $x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}k,\ k\in Z$, получаем расходящийся числовой ряд $4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1/2}}$, а при $x=-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}k,\ k\in Z$ — условно сходящийся ряд $4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{1/2}}$.

Таким образом, ряд (12.3) сходится при $x\in\left[\frac{\pi}{12}(6k-1),\frac{\pi}{12}(6k+1)\right),\ k\in Z$ причем, при $x\in\left(\frac{\pi}{12}(6k-1),\frac{\pi}{12}(6k+1)\right),\ k\in Z$, абсолютно.

Пример 12.3. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{x+2}}3^{-n^4\arcsin\frac{3}{n^2|x|}}\,. \qquad (12.4)$$

Решение. Все члены ряда (12.4)

$$U_n(x)=\frac{(-1)^n}{\sqrt{x+2}}3^{-n^4\arcsin\frac{3}{n^2|x|}}\,(n=1,2,3...)$$

определены при $x\in[3,+\infty)$.

Для всех $x\neq 0$ $\arcsin\frac{3}{n^2|x|}\sim\frac{3}{n^2|x|}$ при $n\to\infty$, значит,

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|U_n(x)\right|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{x+2}}\cdot 3^{-\frac{3n^2}{|x|}}\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3^{3n/|x|}(x+2)^{1/2n}}=0<1 \quad \text{при}$$

всех $x\in[3,+\infty)$.

Следовательно, областью сходимости ряда (12.4) является промежуток $[3,+\infty)$, притом сходимость всюду абсолютная.

3.3. Указания к задаче 13

Задача 13 решается аналогично задачам 11 и 12.

Пример. 13.1. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(3+\frac{1}{n}\right)^n 4^{-\frac{n^2}{x}}. \tag{13.1}$$

Решение. Члены ряда (13.1) $U_n(x)=\left(3+\frac{1}{n}\right)^n\cdot 4^{-\frac{n^2}{x}}$ определены при $x\neq 0$ и

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|U_n(x)\right|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(3+\frac{1}{n}\right)^n\cdot 4^{-\frac{n^2}{x}}}=\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{1}{n}\right)\cdot 4^{-\frac{n}{x}}=\begin{cases}0 & \text{при } x>0,\\ \infty & \text{при } x<0.\end{cases}$$

Следовательно, ряд (13.1) абсолютно сходится для $x\in(0,+\infty)$.

3.4. Указания к задаче 14

Задача 14 решается аналогично задачам 11, 12 и 13.

Пример 14.1. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^5 x^{2n}}{2n+1}. \tag{14.1}$$

Решение. Так как общий член ряда (14.1) $U_n(x)=\dfrac{(n+1)^5 x^{2n}}{2n+1}$ и

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n+2)^5 x^{2n+2}}{2n+3}:\frac{(n+1)^5 x^{2n}}{2n+1}\right]=x^2,$$

то ряд (14.1) сходится абсолютно при $x^2<1$, т.е. в интервале (-1,1). При $x=\pm 1$ имеем числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+1)^5}{2n+1}$, который расходится, так как общий член этого ряда не стремится к нулю при $n\to\infty$.

Таким образом, областью сходимости ряда (14.1) является интервал (-1,1), притом сходимость всюду абсолютная.

3.5. Указания к задаче 15

Функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n(x)$, сходящийся в области D, называется *равномерно сходящимся* в этой области, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $N = N(\varepsilon)$, не зависящее от x, что при всех $n > N(\varepsilon)$для всех $x \in D$ имеет место неравенство

$$\left|R_n(x)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} U_k(x)\right| < \varepsilon .$$

Пример 15.1. Доказать, исходя из определения, равномерную сходимость функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{\sqrt[3]{n^3 - 6}} \tag{15.1}$$

на отрезке [0,1]. При каких n абсолютная величина остатка ряда не превосходит 0,1 для всех $x \in [0,1]$?

Доказательство. При любом фиксированном $x \in [0,1]$ ряд (15.1) является знакочередующимся рядом, члены которого, начиная со второго, по абсолютной величине монотонно убывают и n-й член стремится к нулю при $n \to \infty$. Следовательно, этот ряд сходится, и сумма его остатка не превосходит первого члена этого остатка по абсолютной величине:

$$\left|R_n(x)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{\sqrt[3]{k^3 - 6}}\right| \le \frac{|x|^{n+1}}{\sqrt[3]{(n+1)^3 - 6}} (n = 2,3,4...),$$

значит, для всех $x \in [0,1]$

$$\left|R_n(x)\right| \le \frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^3 - 6}} .$$

Взяв любое $\varepsilon > 0$, потребуем, чтобы $\frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^3 - 6}} < \varepsilon$, отсюда $n > \sqrt[3]{\frac{1}{\varepsilon^3} + 6} - 1$.

Положив, таким образом, $N = \sqrt[3]{\frac{1}{\varepsilon^3} + 6} - 1$, мы убеждаемся, что при $n > N$, действительно, $\left|R_n(x)\right| < \varepsilon$ для всех x из отрезка [0,1]. Тем самым равномерная сходимость ряда (15.1) на отрезке [0,1] доказана.

Так как для любого $x \in [0,1]$

$$\left|R_n(x)\right| \le \frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^3 - 6}} \le 0{,}1$$

при

$$n \ge \sqrt[3]{\frac{1}{(0{,}1)^3} + 6} - 1 \approx 8{,}98$$

и n является натуральным числом, то абсолютная величина остатка ряда (15.1) не превосходит 0,1 для всех $x \in [0,1]$ при n=9,10,11…

3.6. Указания к задаче 16

Если члены функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ в области D не превосходят по абсолютной величине соответствующих членов сходящегося числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами, то этот функциональный ряд сходится в области D равномерно и абсолютно (признак Вейерштрасса). При этом ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется мажорирующим для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$.

Пример 16.1. Доказать равномерную сходимость функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{(n+1)\ln^2(n+1)} \tag{16.1}$$

на отрезке [-2,0].

Доказательство. Так как $|x+1| \le 1$ при $x \in [-2,0]$, то

$$\left|\frac{(x+1)^n}{(n+1)\ln^2(n+1)}\right| \le \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)} (n = 1,2,3,...).$$

Числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)} \tag{16.2}$$

с положительными членами сходится. Действительно, функция $f(x) = \frac{1}{(x+1)\ln^2(x+1)}$ в промежутке $[1,+\infty)$ удовлетворяет условиям интегрального признака Коши и $f(n) = \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)} (n = 1,2,3,...)$, причем несобственный интеграл

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)} = \int_1^{\infty} \frac{d\ln(x+1)}{\ln^2(x+1)} = \frac{1}{\ln 2}$ сходится.

Таким образом, ряд (16.2) является *мажорирующим* для ряда (16.1) на отрезке [-2,0], следовательно, ряд (16.1) сходится на этом отрезке равномерно и абсолютно.

3.7. Указания к задаче 17

Если члены функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ непрерывны на отрезке [a,b] и ряд сходится на [a,b] равномерно, то интеграл от суммы ряда, взятый по отрезку [a,b], равен сумме ряда, полученного почленным интегрированием:

$$\int_a^b\left[\sum_{n=1}^{\infty}U_n(x)\right]dx=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_a^b U_n(x)dx\right].$$

В частности, сумма степенного ряда интегрируема на любом отрезке, содержащемся в интервале сходимости, причем интеграл суммы ряда можно получить почленным интегрированием данного ряда. Кроме того, при почленном интегрировании степенного ряда радиус сходимости не изменяется.

Пример 17.1. Найти сумму ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)(2n+3)}. \tag{17.1}$$

Решение. Интегрируя дважды почленно в пределах от 0 до x при $|x|<1$ геометрический ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n+1}=\frac{x}{1-x^2},$$

получаем:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{2n+2}=\int_0^x\frac{x}{1-x^2}dx=-\frac{1}{2}\ln\left(1-x^2\right),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+3}}{(2n+2)(2n+3)}=-\frac{1}{2}\int_0^x\ln\left(1-x^2\right)dx.$$

Последний интеграл возьмем по частям, полагая

$$U=\ln\left(1-x^2\right),\ dU=-\frac{2xdx}{1-x^2},\quad dV=dx,\quad V=x:$$

$$\int_0^x\ln\left(1-x^2\right)dx=\left(x\ln\left(1-x^2\right)\right)\Big|_0^x-2\int_0^x\frac{-x^2dx}{1-x^2}=x\ln\left(1-x^2\right)-2\int_0^x\left(1-\frac{1}{1-x^2}\right)dx=$$

$$=x\ln\left(1-x^2\right)-2\left(x-\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\right)\Big|_0^x=x\ln\left(1-x^2\right)-2x+\ln\frac{1+x}{1-x},$$

следовательно,

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+3}}{(2n+2)(2n+3)}=x-\frac{1}{2}x\ln\left(1-x^2\right)-\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$, отсюда при $x\neq 0$ и $|x|<1$ сумма ряда (17.1)

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)(2n+3)}=1-\frac{1}{2}\ln\left(1-x^2\right)-\frac{1}{2x}\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

Очевидно, что $S(0)=0$ и

$$S(-1)=S(1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{(2n+3)}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+1}+\ldots \tag{17.2}$$

Известно, что для всех значений x из промежутка [-1,1] имеет место равенство

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}+\ldots,$$
в частности, при x=1
$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\ldots-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}-\ldots,$$
следовательно,
$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+1}+\ldots=1-\ln 2. \qquad (17.3)$$
Сравнивая (17.2) и (17.3), получаем
$S(-1)=S(1)=1-\ln 2$.
Таким образом, ряд (17.1) сходится на отрезке [-1,1] и его сумма равна
$$S(x)=\begin{cases} 0 \quad при \quad x=0, \\ 1-\frac{1}{2}(1-x^2)-\frac{1}{2x}\ln\frac{1+x}{1-x} \quad при \ \ 0<|x|<1, \\ 1-\ln 2 \quad при \quad |x|=1, \end{cases}$$
а во всех остальных точках расходится.

Пример 17.2. Найти сумму ряда
$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{ctg^n x}{(n-1)n}. \qquad (17.4)$$
Решение. Рассмотрим сходящийся при $|y|<1$ геометрический ряд
$$\sum_{n=2}^{\infty} y^{n-2}=\frac{1}{1-y}.$$
Интегрируя дважды этот ряд в пределах от 0 до y при $|y|<1$, находим:
$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{y^{n-1}}{n-1}=\int_0^y\frac{dy}{1-y}=-\ln(1-y),$$
$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{y^n}{(n-1)n}=-\int_0^y\ln(1-y)dy.$$
Положим $U=\ln(1-y)$, $dU=-\frac{dy}{1-y}$, $dV=dy$, $V=y$, тогда по формуле интегрирования по частям получаем
$$\int_0^y\ln(1-y)dy=y\ln(1-y)-\int_0^y\frac{-ydy}{1-y}=y\ln(1-y)-\int_0^y\left(1-\frac{1}{1-y}\right)dy=$$
$$=y\ln(1-y)-y-\ln(1-y)=(y-1)\ln(1-y)-y,$$
следовательно, при $|y|<1$
$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{y^n}{(n-1)n}=y+(1-y)\ln(1-y).$$
При y=1 имеем

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)n}=\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right),$$

следовательно, частичная сумма

$$\sum_{n=2}^{k}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-...+\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}=1-\frac{1}{k}\to 1 \quad при \quad k\to\infty,$$

значит,

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)n}=1.$$

Далее, при y=-1 находим:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n-1)n}=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=$$
$$=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}-\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+...=$$
$$=1+2\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...-\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}-...\right)=1+2(\ln 2-1)=2\ln 2-1$$

(см. пример 17.1).
Таким образом,

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{y^n}{(n-1)n}=\begin{cases} y+(1-y)\ln(1-y) & при \quad |y|<1, \\ 1 & при \quad y=1, \\ 2\ln 2-1 & при \quad y=-1. \end{cases} \qquad (17.5)$$

Для данного ряда (17.4), полагая $y=ctgx$ в соотношении (17.5), получаем

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{ctg^n x}{(n-1)n}=\begin{cases} ctgx+(1-ctgx)\ln(1-ctgx) & при \quad |ctgx|<1, \\ 1 & при \quad ctgx=1, \\ 2\ln 2-1 & при \quad ctgx=-1 \end{cases}$$

или

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{ctg^n x}{(n-1)n}=\begin{cases} ctgx+(1-ctgx)\ln(1-ctgx) & при \quad \frac{\pi}{4}+\pi k<x<\frac{3\pi}{4}+\pi k, \\ 1 & при \quad x=\frac{\pi}{4}+\pi k, \\ 2\ln 2-1 & при \quad x=\frac{3\pi}{4}+\pi k, k\in Z, \end{cases}$$

а во всех остальных точках ряд (17.4) расходится.

3.8. Указания к задаче 18

Пусть члены функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty}U_n(x)$ определены на отрезке [a,b] и имеют в нем непрерывные производные $U_n'(x)$. Если на отрезке [a,b] не только сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$, но и равномерно сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U'_n(x)$, то $\left[\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)\right]' = \sum_{n=1}^{\infty} U'_n(x)$. В частности, степенной ряд можно дифференцировать почленно внутри его интервала сходимости. Кроме того, при почленном дифференцировании степенного ряда радиус сходимости не изменяется.

Пример 18.1. Найти сумму ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(n^2+9n+5\right)x^{n+1}. \tag{18.1}$$

Решение. Возьмем сходящийся при $|x|<1$ геометрический ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} = \frac{x}{1-x} \tag{18.2}$$

и дифференцируем его дважды

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}, \tag{18.3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^2+n\right)x^{n-1} = \frac{2}{(1-x)^3}. \tag{18.4}$$

Ряд (18.1) представим в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(n^2+9n+5\right)x^{n+1} = x^2\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^2+n\right)x^{n-1} + 8x\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n - 3\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}. \tag{18.5}$$

Из равенств (18.2)-(18.5) следует, что при $|x|<1$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(n^2+9n+5\right)x^{n+1} = \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{8x}{(1-x)^2} - \frac{3x}{1-x} = \frac{5x-3x^3}{(1-x)^3}.$$

При $x=1$ и $x=-1$ получаем соответственно ряды $\sum_{n=0}^{\infty}\left(n^2+9n+5\right)$ и $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(n^2+9n+5\right)$, которые расходятся.

Таким образом, ряд (18.1) сходится лишь при $|x|<1$ и его сумма равна

$S(x) = \dfrac{5x-3x^3}{(1-x)^3}, \qquad x\in(-1;1).$

3.9. Указания к задаче 19

Если функция $f(x)$ допускает в некоторой окрестности точки a разложение в степенной ряд по степеням $x-a$, то этот ряд имеет вид

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots \tag{19.1}$$

Ряд (19.1) называется *рядом Тейлора.* При $a=0$ ряд Тейлора называется также *рядом Маклорена.*

Равенство (19.1) справедливо, если остаточный член ряда Тейлора

$$R_n(x) = f(x) - \left[f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\right] \to 0$$

при $n \to \infty$. Для оценки остаточного члена можно пользоваться формулой

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a + \Theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \qquad 0 < \Theta < 1,$$

называемой *остаточным членом в форме Лагранжа.*

Имеют место следующие равенства:

1) $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \quad x \in (-\infty, +\infty),$

2) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, \quad x \in (-\infty, +\infty),$

3) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \quad x \in (-\infty, +\infty),$

4) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \ldots, \quad x \in (-1, 1],$ (19.2)

5) $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots, \quad x \in (-1, 1)$

(при x=1 это равенство справедливо для $\alpha > -1$, а при x=-1 для $\alpha > 0$), в частности, при $\alpha = -1$ получаем геометрический ряд со знаменателем –x:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n + \ldots, \quad x \in (-1, 1), \qquad (19.3)$$

6) $\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{1 \cdot 3 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \ldots 2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots, \quad x \in [-1, 1],$

7) $arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots, \quad x \in [-1, 1].$

Пример 19.1. Разложить функцию $\ln\frac{2+x}{1-x}$ в ряд Тейлора по степеням x.

Решение. Данную функцию представим в виде

$$\ln\frac{2+x}{1-x} = \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{x}{2}\right) - \ln(1 + (-x))$$

На основании равенства (19.2) при $-1 < \frac{x}{2} \le 1$, т.е. при $-2 < x \le 2$ можем записать

$$\ln\left(1 + \frac{x}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{2^n n},$$

аналогично при $-1 < -x \le 1$, т.е. при $-1 \le x < 1$

$$\ln(1 + (-x)) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n},$$

следовательно,

$$\ln\frac{2+x}{1-x} = \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n-1}}{2^n} + 1\right) \frac{x^n}{n}, \quad x \in [-1, 1).$$

Пример 19.2. Разложить функцию $\frac{3}{2-x-x^2}$ в ряд Тейлора по степеням x.

Решение. Данную дробь разложим на простейшие

$$\frac{3}{2-x-x^2} = \frac{1}{2+x} + \frac{1}{1-x}.$$

Пользуясь разложением (19.3), находим:

$$\frac{1}{2+x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{2^{n+1}},\quad |x|<2,$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,\quad |x|<1,$$

следовательно,

$$\frac{3}{2-x-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}+1\right)x^n,\qquad x\in(-1,1).$$

3.10.Указания к задаче 20

При приближенном вычислении определенного интеграла часто, особенно в случае, когда соответствующий неопределенный интеграл не выражается через элементарные функции в конечном виде, бывает удобно представить его в виде суммы ряда. Для этого сначала подынтегральную функцию разлагают в степенной ряд, а затем интегрируют почленно.

Пример 20.1. Вычислить интеграл $\int_0^{0,1}\cos(100x^2)dx$ с точностью до 0,001.

Решение. Полагая в разложении

$$\cos t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!},\quad t\in(-\infty,+\infty),$$

$t=100x^2$ получаем

$$\cos(100x^2)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 10^{4n}x^{4n}}{(2n)!},\quad x\in(-\infty,+\infty),$$

следовательно,

$$\int_0^{0,1}\cos(100x^2)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{0,1}\frac{(-1)^n 10^{4n}x^{4n}}{(2n)!}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\left.\frac{(-1)^n 10^{4n}x^{4n+1}}{(4n+1)(2n)!}\right|_0^{0,1}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{10(4n+1)(2n)!}.$$

Последний ряд является знакочередующимся рядом, поэтому, если в качестве его суммы взять сумму первых n-1 членов, то ошибка по абсолютной величине не будет превосходить числа

$a_n=\frac{1}{10(4n+1)(2n)!}$. Так как $a_1=\frac{1}{100}>0,001$, $a_2=\frac{1}{2160}<0,001$, то с точностью до 0,001 имеем

$$\int_0^{0,1}\cos(100x^2)dx\approx\sum_{n=0}^{1}\frac{(-1)^n}{10(4n+1)(2n)!}=0,1-0,01=0,09.$$

4. РЯДЫ ФУРЬЕ

Теоретические вопросы

1. Тригонометрический ряд Фурье функции с периодом 2π.
2. Ряд Фурье для четных и нечетных функций.
3. Ряд Фурье функции с любым периодом.
4. Ряд Фурье функции, заданной в конечном промежутке.
5. Ряд Фурье в комплексной форме.
6. Ряд Фурье по любой ортогональной системе функций.

Теоретические упражнения.

1. Доказать, что если функция $f(x)$ имеет период T, то при любом действительном числе λ $\int\limits_{\lambda}^{\lambda+T} f(x)dx = \int\limits_{0}^{T} f(x)dx = \int\limits_{-T/2}^{T/2} f(x)dx$.
2. Доказать, что система функций $1, \cos\frac{\pi}{\ell}x, \sin\frac{\pi}{\ell}x, \cos\frac{2\pi}{\ell}x, \sin\frac{2\pi}{\ell}, ..., \cos\frac{n\pi}{\ell}x, \sin\frac{n\pi}{\ell}x, ...$ ортогональна на отрезке $[-\ell, \ell]$
3. Доказать, что системы функций

а) $1, \cos x, \cos 2x, \cos nx, ...;$

б) $\sin x, \sin 2x, ..., \sin nx, ...$

ортогональны на отрезке $[0, \pi]$.

Расчетные задания.

Задача 21. Разложить в ряд Фурье следующие периодические функции:

21.1. $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{при } -\pi < x \le 0, \\ 1 - x & \text{при } 0 < x \le \pi \end{cases}$ $\left(f(x + 2\pi) = f(x)\right);$

21.2. $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 1 & \text{при } -\pi < x < 0, \\ -1 & \text{при } 0 \le x \le \pi \end{cases}$ $\left(f(x + 2\pi) = f(x)\right);$

21.3. $f(x) = \frac{1}{3}x^2$ при $3 < x \le 5$ $\left(f(x + 2)\right) = f(x);$

21.4. $f(x) = |1 - x|$ при $-2 < x \le 2$ $\left(f(x + 4) = f(x)\right);$

21.5. $f(x) = x(\pi - x)$ при $0 < x \le \pi$ $\left(f(x + \pi) = f(x)\right);$

21.6. $f(x) = e^x$ при $-2 < x \le 2$ $\left(f(x + 4) = f(x)\right);$

21.7. $f(x) = \begin{cases} -x & \text{при } -\pi < x \le 0, \\ \frac{x^2}{\pi} & \text{при } 0 < x \le \pi \end{cases}$ $\left(f(x + 2\pi) = f(x)\right);$

21.8. $f(x) = \begin{cases} x & \text{при } -\pi < x < 0, \\ \pi & \text{при } 0 \le x \le \pi \end{cases}$ $\left(f(x + 2\pi) = f(x)\right);$

21.9. $f(x)=\begin{cases} ax & \text{при } -\pi<x\le 0, \\ bx & \text{при } 0<x\le\pi \ \left(f(x+2\pi)=f(x)\right); \end{cases}$

21.10. $f(x)=x^2$ при $0<x\le 2\pi$ $\left(f(x+2\pi)=f(x)\right)$;

21.11. $f(x)=e^x-1$ при $0<x\le 2\pi$ $\left(f(x+2\pi)=f(x)\right)$;

21.12. $f(x)=e^x$ при $-l<x\le l$ $\left(f(x+2l)=f(x)\right)$;

21.13. $f(x)=\cos ax$ (a — не целое число) при $-\pi<x\le\pi$ $\left(f(x+2\pi)=f(x)\right)$;

21.14. $f(x)=\sin ax$ (a — не целое число) при $-\pi<x\le\pi$ $\left(f(x+2\pi)=f(x)\right)$;

21.15. $f(x)=\begin{cases} 1 & \text{при } 0<x\le 2, \\ x & \text{при } 2<x\le 4 \ \left(f(x+4)=f(x)\right); \end{cases}$

21.16. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2-x}{x} & \text{при } -2<x\le 0, \\ 0 & \text{при } 0<x\le 2 \ \left(f(x+4)=f(x)\right); \end{cases}$

21.17. $f(x)=|\sin x|$;

21.18. $f(x)=\begin{cases} 1 & \text{при } -1<x\le 0, \\ x & \text{при } 0<x\le 1 \ \left(f(x+2)=f(x)\right); \end{cases}$

21.19. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{\pi} & \text{при } 0<x\le\pi, \\ -1 & \text{при } \pi<x\le 2\pi \ \left(f(x+2\pi)=f(x)\right); \end{cases}$

21.20. $f(x)=(2-x)^2$ при $0<x\le 2$ $\left(f(x+2)=f(x)\right)$;

21.21. $f(x)=e^{3-x}$ при $-3<x\le 3$ $\left(f(x+6)=f(x)\right)$;

21.22. $f(x)=\begin{cases} l-x & \text{при } -l<x\le 0, \\ l & \text{при } 0<x<l \ \left(f(x+2l)=f(x)\right); \end{cases}$

21.23. $f(x)=\begin{cases} a & \text{при } -\pi<x\le 0, \\ b & \text{при } 0<x<\pi \ \left(f(x+2\pi)=f(x)\right); \end{cases}$

21.24. $f(x)=|\cos x|$;

21.25. $f(x)=\begin{cases} ax-b & \text{при } -l<x<0, \\ ax+b & \text{при } 0\le x\le l \ \left(f(x+2l)=f(x)\right); \end{cases}$

21.26. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{при } -\pi<x\le 0, \\ x-\dfrac{\pi}{2} & \text{при } 0<x\le\pi \ \left(f(x+2\pi)=f(x)\right); \end{cases}$

21.27. $f(x)=a|x|+b$ при $-l<x\le l$ $\left(f(x+2l)=f(x)\right)$;

21.28. $f(x)=\begin{cases} (x-1)^2 & \text{при } -1<x\le 0, \\ 0 & \text{при } 0<x<1 \ \left(f(x+2)=f(x)\right); \end{cases}$

21.29. $f(x)=x(4-x)$ при $0<x\le 4$ $\left(f(x+4)=f(x)\right)$;

21.30. $f(x)=\begin{cases}0 \text{ при } -\pi < x \le 0,\\ 2+x^2 \text{ при } 0<x<\pi \ \ (f(x+2\pi)=f(x)).\end{cases}$

Задача 22. Разложить в ряд Фурье функции:

22.1. $f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}$ в интервале $(0,\pi)$ по косинусам;

22.2. $f(x)=\begin{cases}x \text{ при } 0<x\le\frac{\pi}{2},\\ 0 \text{ при } \frac{\pi}{2}<x<\pi\end{cases}$ в интервале $(0,\pi)$ по синусам;

22.3. $f(x)=|x|$ в интервале $(-1{,}1)$

22.4. $f(x)=x^2$ в интервале $(0,\pi)$ по синусам;

22.5. $f(x)=2x$ в интервале $(0{,}1)$;

22.6. $f(x)=10-x$ в интервале $(5{,}15)$;

22.7. $f(x)=1-x$ в интервале $(0{,}1)$ по синусам;

22.8. $f(x)=\cos 2x$ в интервале $(0,\pi)$ по синусам;

22.9. $f(x)=\begin{cases}1-\frac{x}{2h} \text{ при } 0<x\le 2h,\\ 0 \text{ при } 2h<x<\pi\end{cases}$ в интервале $(0,\pi)$ по косинусам;

22.10. $f(x)=\begin{cases}x \text{ при } 0<x\le 1,\\ 2-x \text{ при } 1<x<2\end{cases}$ в интервале $(0{,}2)$ по синусам;

22.11. $f(x)=x^2+1$ в интервале $(-2{,}2)$;

22.12. $f(x)=\begin{cases}1 \text{ при } 0<x\le 2h,\\ 0 \text{ при } 2\text{h}<x<\pi\end{cases}$ в интервале $(0,\pi)$ по косинусам;

22.13. $f(x)=\begin{cases}x \text{ при } 0<x\le\frac{l}{2},\\ l-x \text{ при } \frac{\ell}{2}<x<l\end{cases}$ в интервале $(0,l)$ по косинусам;

22.14. $f(x)=\begin{cases}x \text{ при } 0<x\le\frac{l}{2},\\ l-x \text{ при } \frac{\ell}{2}<x<l\end{cases}$ в интервале $(0,l)$ по синусам;

22.15. $f(x)=x^2$ в интервале $(-1{,}1)$;

22.16. $f(x)=\sin ax$ (a - целое число) в интервале $(0,\pi)$ по косинусам;

22.17. $f(x)=\begin{cases}1 \text{ при } 1<x<2,\\ 2-x \text{ при } 2\le x<3;\end{cases}$

22.18. $f(x)=2x-2$ в интервале $(0,\pi)$ по косинусам;

22.19. $f(x)=2+x^2$ в интервале $(0,\pi)$ по синусам;

22.20. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\pi} & \text{при} \quad 0<x<\pi, \\ -1 & \text{при} \quad \pi \le x < 2\pi;\end{cases}$ в интервале $(0,2\pi)$ по косинусам;

22.21. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}-x & \text{при} \quad 0<x<\dfrac{1}{2}, \\ 0 & \text{при} \quad \dfrac{1}{2}<x<1;\end{cases}$ в интервале $(0,1)$ по косинусам;

22.22. $f(x)=\cos ax$ (a - целое число) в интервале $(0,\pi)$ по синусам;

22.23. $f(x)=e^x$ в интервале $(0,\pi)$ по косинусам;

22.24. $f(x)=x$ в интервале $(0,\pi)$ по косинусам;

22.25. $f(x)=e^x$ в интервале $(0,1)$ по синусам;

22.26. $f(x)=x^3$ в интервале $(-\pi,\pi)$;

22.27. $f(x)=e^x-1$ в интервале $(0,2\pi)$;

22.28. $f(x)=|x|$ в интервале $(-l,l)$;

22.29. $f(x)=\begin{cases}x & \text{при} \quad 0<x\le 1, \\ 0 & \text{при} \quad 1<x<\dfrac{3}{2};\end{cases}$ в интервале $\left(0,\dfrac{3}{2}\right)$ по косинусам;

22.30. $f(x)=x^2$ в интервале $(-\pi,\pi)$.

4.1. Указания к задаче 21

Тригонометрическая система функций $1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x, \ldots, \cos nx,\ \sin nx, \ldots$ является ортогональной на любом отрезке длины 2π, в частности, на отрезке $[-\pi,\pi]$, т.е. интеграл по всякому отрезку длины 2π от произведения любых двух различных функций этой системы равен нулю.

Если $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$ существует и конечен, то существуют числа

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx \quad (n=0,1,2,\ldots), \tag{21.1}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin xdx \quad (n=0,1,2,\ldots), \tag{21.2}$$

называемые коэффициентами Фурье функции $f(x)$. Ряд

$$S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right), \tag{21.3}$$

где a_n и b_n - коэффициенты Фурье (21.1) и (21.2) функции $f(x)$, называется рядом Фурье функции $f(x)$.

Если $\int\limits_{-l}^{l} f^2(x)dx < +\infty$, то коэффициенты Фурье записываются в виде

$$a_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx \quad (n = 0,1,2,...), \tag{21.4}$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx \quad (n = 0,1,2,...), \tag{21.5}$$

а ряд Фурье- в виде

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x + b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right). \tag{21.6}$$

Если функция $f(x)$ - четная, то

$$a_n = \frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx \quad (n = 0,1,2,...),\ b_n = 0 \quad (n = 1,2,...). \tag{21.7}$$

Если функция $f(x)$ - нечетная, то

$$a_n = 0 \quad (n = 0,1,2,...),\ b_n = \frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx \quad (n = 1,2,...). \tag{21.8}$$

Суммы рядов (21.3) и (21.6) являются периодическими функциями соответственно с периодами 2π и $2l$.

Функция $f(x)$ называется кусочно гладкой на отрезке $[a,b]$, если сама функция и ее производная имеют на $[a,b]$ не более чем конечное число точек разрыва, и все они первого рода, т.е. в каждой точке разрыва x функция $f(x)$ имеет конечный левый предел $f(x-0) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} f(x-\varepsilon)$ и конечный правый предел $f(x+0) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} f(x+\varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$.

Если периодическая функция $f(x)$ с периодом $2l$ кусочно гладкая на отрезке $[-l,l]$, то ряд Фурье (21.6) сходится к значению $f(x)$ в каждой ее точке непрерывности и к значению $\frac{1}{2}\left(f(x-0) + f(x+0)\right)$ в точках разрыва. Если дополнительно $f(x)$ непрерывна на всей числовой оси, то ряд (21.6) сходится к $f(x)$ равномерно.

В случае разложения функции $f(x)$ в ряд Фурье в произвольном промежутке $(a, a+2l)$ длины $2l$ пределы интегрирования в формулах (21.4) и (21.5) коэффициентов Фурье следует заменить соответственно на a и $a+2l$. В концах интервала $(a, a+2l)$ сумма ряда Фурье (21.6) равна

$$S(a) = S(a+2l) = \frac{1}{2}\left(f(a+0) + f(a+2l-0)\right).$$

Пример 21.1. Разложить в ряд Фурье следующие периодические функции:

а) $f(x) = e^{ax}$ при $-\pi < x \le \pi$ $\left(f(x+2\pi) = f(x)\right)$;

б) $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad -2<x\le 0, \\ \dfrac{x}{2} & \text{при} \quad 0<x\le 2 \quad \left(f(x+4)=f(x)\right); \end{cases}$

в) $f(x)=\begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad -l<x\le -\dfrac{l}{2}, \\ \cos\dfrac{\pi x}{l} \quad \text{при} \quad -\dfrac{l}{2}<x\le \dfrac{l}{2}, \\ 0 \quad \text{при} \quad \dfrac{l}{2}<\text{x}\le l \quad \left(f(x+2l)=f(x)\right). \end{cases}$

Решение. Все заданные функции удовлетворяют достаточным условиям разложимости в ряд Фурье. Найдем их разложения.

а) Пользуясь формулами:

$$\int e^{ax}\cos bx dx=\frac{e^{ax}\left(b\sin bx+a\cos bx\right)}{a^2+b^2}+c$$

и

$$\int e^{ax}\sin bx dx=\frac{e^{ax}\left(a\sin bx-b\cos bx\right)}{a^2+b^2}+c,$$

получим коэффициенты Фурье:

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ax}\cos kx dx=\left.\frac{e^{ax}\left(k\sin kx+a\cos kx\right)}{\pi\left(a^2+k^2\right)}\right|_{-\pi}^{\pi}=$$

$$=\frac{e^{a\pi}\left(k\sin k\pi+a\cos k\pi\right)-e^{-a\pi}\left(k\sin(-k\pi)+a\cos(-k\pi)\right)}{\pi\left(a^2+k^2\right)}=$$

$$=\frac{a\cos k\pi\left(e^{a\pi}-e^{-a\pi}\right)}{\pi\left(a^2+k^2\right)}=\frac{(-1)^k a\left(e^{a\pi}-e^{-a\pi}\right)}{\pi\left(a^2+k^2\right)} \quad (k=0,1,2,...);$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ax}\sin kx dx=\left.\frac{e^{ax}\left(a\sin kx-k\cos kx\right)}{\pi\left(a^2+k^2\right)}\right|_{-\pi}^{\pi}=$$

$$=\frac{e^{a\pi}\left(-k\cos k\pi\right)-e^{-a\pi}\left(-k\cos k\pi\right)}{\pi\left(a^2+k^2\right)}=\frac{(-1)^{k+1}\kappa\left(e^{a\pi}-e^{-a\pi}\right)}{\pi\left(a^2+k^2\right)} \quad (k=1,2,...).$$

Поэтому ряд Фурье для данной функции имеет следующий вид:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos kx+b_k\sin kx\right)=\frac{e^{a\pi}-e^{-a\pi}}{2\pi a}+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^k a\left(e^{a\pi}-e^{-a\pi}\right)}{\pi\left(a^2+k^2\right)}\cos kx+\frac{(-1)^{k+1}k\left(e^{a\pi}-e^{-a\pi}\right)}{\pi\left(a^2+k^2\right)}\sin kx\right]=$$

$$=\frac{e^{a\pi}-e^{-a\pi}}{\pi}\left[\frac{1}{2a}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\left(a\cos kx-k\sin kx\right)}{a^2+k^2}\right]=$$

$$=\frac{e^{a\pi}-e^{-a\pi}}{\pi}\left(\frac{1}{2a}-\frac{a\cos x-\sin x}{a^2+1}+\frac{a\cos 2x-2\sin 2x}{a^2+4}-\ldots\right).$$

Сумма полученного ряда $S(x)$ равна значению функции $f(x)$ в точках непрерывности этой функции. В точках разрыва $x=(2n-1)\pi(n=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ сумма ряда равна среднему арифметическому пределов функций слева и справа:

$$S((2n-1)\pi)=\frac{f((2n-1)\pi-0)+f((2n-1)\pi+0)}{2}.$$

В силу периодичности функции $f(x)$ с периодом $2\pi(f(x+2\pi n)=f(x))$ имеем

$$f((2n-1)\pi-0)+f((2n-1)\pi+0)=f(-\pi-0)+f(-\pi+0)=$$
$$=f(-\pi-0+2\pi)+f(-\pi+0)=f(-\pi+0)+f(\pi-0),$$

следовательно,

$$S((2n-1)\pi)=\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}=\frac{e^{a(-\pi+0)}+e^{a(\pi-0)}}{2}=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to-\pi+0}e^{ax}+\lim_{x\to\pi-0}e^{ax}\right)=\frac{e^{-a\pi}+e^{a\pi}}{2}.$$

б) Вычислим коэффициенты Фурье:

$$a_k=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\cos\frac{k\pi x}{\ell}dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)\cos\frac{k\pi x}{2}dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}f(x)\cos\frac{k\pi x}{2}dx+\frac{1}{2}\int_{0}^{2}f(x)\cos\frac{k\pi x}{2}dx=$$
$$=\frac{1}{4}\int_0^2 x\cos\frac{k\pi x}{2}dx.$$

Последний интеграл возьмем по частям. Положим $U=x,\quad dV=\cos\frac{k\pi x}{2}dx$; тогда $dU=dx,\quad V=\frac{2}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{2}$, следовательно

$$\int_0^2 x\cos\frac{k\pi x}{2}dx=\frac{2x}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{2}\bigg|_0^2-\int_0^2\frac{2}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{2}dx=\left(\frac{2}{k\pi}\right)^2\cos\frac{k\pi x}{2}\bigg|_0^2=\frac{4}{k^2\pi^2}(\cos k\pi-\cos 0)=$$
$$=\frac{4\left[(-1)^k-1\right]}{k^2\pi^2}.$$

Таким образом,

$$a_k=\frac{1}{4}\int_0^2 x\cos\frac{k\pi x}{2}dx=\frac{(-1)^k-1}{k^2\pi^2}=\begin{cases}-\dfrac{2}{k^2\pi^2} & \text{при } k=1,3,5,\ldots\\ 0 \text{ при } k=2,4,6,\ldots\end{cases}$$

При $k=0$ полученное здесь выражение для a_k не имеет смысла. Поэтому коэффициент a_0 вычислим отдельно:

$$a_0=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^2\frac{x}{2}dx=\frac{1}{4}\frac{x^2}{2}\bigg|_0^2=\frac{1}{2}.$$

Аналогично найдем

$$b_k=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}\,dx=\frac{1}{4}\int_0^2 x\sin\frac{k\pi x}{2}\,dx=\frac{1}{4}\left(-\frac{2x}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{2}\Bigg|_0^2+\frac{2}{k\pi}\int_0^2\cos\frac{k\pi x}{2}\,dx\right)=$$

$$=-\frac{1}{k\pi}\cos k\pi+\frac{1}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi x}{2}\Bigg|_0^x=\frac{(-1)^{k+1}}{k\pi}\quad (k=1,2,3,...).$$

Выпишем найденный ряд Фурье:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{\ell}+b_k\sin\frac{k\pi x}{\ell}\right)=\frac{1}{4}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^k-1}{k^2\pi^2}\cos\frac{k\pi x}{2}+\frac{(-1)^{k+1}}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{2}\right]=$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{2}{\pi^2}\cos\frac{\pi x}{2}+\frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2}-\frac{1}{2\pi}\sin\pi x-\frac{2}{9\pi^2}\cos\frac{3\pi x}{2}+\frac{1}{3\pi}\sin\frac{3\pi x}{2}-\frac{1}{4\pi}\sin 2\pi x-...$$

Сумма найденного ряда $S(x)$совпадает с данной функцией $f(x)$ во всех точках непрерывности функции $f(x)$. В точках разрыва $x=4k-2\ \ (k=0,\pm1,\pm2,...)$

$$S(4k-2)=\frac{f(4k-2-0)+f(4k-2+0)}{2}=\frac{f(-2-0)+f(-2+0)}{2}=$$

$$=\frac{f(-2+0)+f(2-0)}{2}=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}.$$

Заметим, что точки $x=4k(k=0,\pm1,\pm2,...)$ являются точками непрерывности данной функции $f(x)$. В силу периодичности функции достаточно установить непрерывность $f(x)$ в точке $x=0$. Это сразу следует из соотношения $f(-0)=f(+0)=f(0)$.

в) Данная функция четная, вследствие чего все коэффициенты $b_k=0$, а коэффициенты a_k вычисляются таким образом:

$$a_k=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}f(x)\cos\frac{k\pi x}{\ell}\,dx=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell/2}f(x)\cos\frac{k\pi x}{\ell}\,dx+\frac{2}{\ell}\int_{\ell/2}^{\ell}f(x)\cos\frac{k\pi x}{\ell}\,dx=$$

$$=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell/2}\cos\frac{\pi x}{\ell}\cos\frac{k\pi x}{\ell}\,dx=\frac{1}{\ell}\int_0^{\ell/2}\left[\cos\left(\frac{\pi x}{\ell}-\frac{k\pi x}{\ell}\right)+\cos\left(\frac{\pi x}{\ell}+\frac{k\pi x}{\ell}\right)\right]dx=$$

$$=\frac{1}{\ell}\left[\frac{\ell}{(k-1)\pi}\sin\frac{(k-1)\pi x}{\ell}\Bigg|_0^{\ell/2}+\frac{\ell}{(k+1)\pi}\sin\frac{(k+1)\pi x}{\ell}\Bigg|_0^{\ell/2}\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{k-1}\sin\frac{(k-1)\pi}{2}+\frac{1}{k+1}\sin\frac{(k+1)\pi}{2}\right].$$

При $k=1$ найденное выражение для a_k непригодно, поэтому коэффициент a_1 вычислим отдельно:

$$a_1=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\cos\frac{\pi x}{\ell}dx=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell/2}\cos^2\frac{\pi x}{\ell}dx=\frac{1}{\ell}\int_0^{\ell/2}\left(1+\cos\frac{2\pi x}{\ell}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{\ell}\left(x+\frac{\ell}{2\pi}\sin\frac{2\pi x}{\ell}\right)\Bigg|_0^{\ell/2}=\frac{1}{\ell}\cdot\frac{\ell}{2}=\frac{1}{2}.$$

Итак,

$$a_0=\frac{2}{\pi},\ a_1=\frac{1}{2},\quad a_k=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{k-1}\sin\frac{(k-1)\pi}{2}+\frac{1}{k+1}\sin\frac{(k+1)\pi}{2}\right]\quad (k=2,3,4,...).$$

Легко видеть, что если k нечетное число и $k\geq 3$, то $a_k=0$; если же k четно, $k=2m$, то

$$a_{2m}=\frac{2(-1)^{m+1}}{\pi\left(4n^2-1\right)}\quad (m=1,2,3,...).$$

Поэтому, учитывая непрерывность данной функции $f(x)$ на всей числовой оси, получим

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\frac{k\pi x}{\ell}=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\cos\frac{\pi x}{\ell}+\frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{4m^2-1}\cos\frac{2m\pi x}{\ell}\quad (-\infty<x<\infty).$$

4.2. Указания к задаче 22

В силу формул (21.7) и (21.8) четная функция разлагается в неполный ряд Фурье по косинусам, а нечетная функция ─ по синусам. Функция, заданная в интервале $(0,\ell)$, может быть продолжена в интервал $(-\ell,0)$ либо как четная, либо как нечетная; следовательно, ее можно разложить в интервале $(0,\ell)$ в неполный ряд Фурье по синусам или по косинусам.

Пользуясь формулами Эйлера, ряд Фурье (21.6) можно записать в комплексной форме

$$S(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n e^{i\frac{n\pi}{\ell}x},$$

где

$$c_n=\frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)e^{-i\frac{n\pi}{\ell}x}dx\quad (n=0,\pm1,\pm2,...),$$

при этом

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}, \quad c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2} \quad (k = 1,2,3...).$$

Пример 22.1. Разложить в ряд Фурье следующие функции:

а) $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$ в интервале $(0, 2\pi)$;

б) $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{при} \quad 2 < x \le 4, \\ 2x & \text{при} \quad 4 < x < 6; \end{cases}$

в) $f(x) = \dfrac{1}{2}x$ на отрезке $[0, \ell]$ по синусам;

г) $f(x) = e^x$ в интервале $(-\pi, \pi)$ в комплексной форме.

Решение. В указанных промежутках данные функции можно разложить в ряд Фурье по формулам разложения периодических функций, так как их можно продолжить как периодические функции на всю числовую ось. Интеграл от периодической функции по любому отрезку, длина которого равна периоду, имеет всегда одно и то же значение. Поэтому при вычислении коэффициентов Фурье промежуток интегрирования $(-\ell, \ell)$ можно заменить промежутком $(\lambda, \lambda + 2\ell)$, где λ — любое число.

а) Вычислим значения коэффициентов Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi - x}{2}dx = \frac{1}{2\pi}\left(\pi x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 0,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\pi - x)\cos kx dx.$$

Последний интеграл возьмем методом интегрирования по частям.

Положим $U = \pi - x, \quad dV = \cos kx dx$; тогда $dU = -dx, \quad V = \dfrac{1}{k}\sin kx$,

следовательно,

$$a_k = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi - x}{k}\sin kx\Bigg|_0^{2\pi} + \frac{1}{k}\int_0^{2\pi}\sin kx dx\right) = \frac{1}{2k\pi}\left(-\frac{1}{k}\cos kx\right)\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= -\frac{1}{2k^2\pi}(\cos 2k\pi - \cos 0) = 0 \quad (k = 1,2,3...).$$

Аналогично, интегрируя по частям, найдем

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\pi - x)\sin kx dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{\pi - x}{k}\cos kx\Bigg|_0^{2\pi} - \frac{1}{k}\int_0^{2\pi}\cos kx dx\right) = \frac{1}{k}(k = 1,2,3...).$$

Так как данная функция $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$ непрерывна в промежутке $(0, 2\pi)$, то

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin kx \qquad (0 < x < 2\pi).$$

Вне промежутка равенство не справедливо. В частности, в точках $x = 0$ и $x = 2\pi$ сумма ряда равна нулю, и равенство нарушается.

Если положить в найденном разложении $x = \frac{\pi}{2}$, то получим ряд Лейбница:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

б) Полагая $\ell = 2$ и разбивая интервал интегрирования (2,6) точкой $x = 4$ на две части (в каждой из них функция задана различными формулами), получим:

$$a_0 = \frac{1}{\ell} \int_{\lambda}^{\lambda+2\ell} f(x)dx = \frac{1}{2} \int_2^6 f(x)dx = \frac{1}{2}\left(\int_2^4 2dx + \int_4^6 2xdx \right) = x\Big|_2^4 + \frac{x^2}{2}\Big|_2^4 = 12;$$

$$a_k = \frac{1}{\ell} \int_{\lambda}^{\lambda+2\ell} f(x) \cos\frac{k\pi}{\ell} xdx = \frac{1}{2} \int_2^6 f(x) \cos\frac{k\pi x}{2} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_2^4 2\cos\frac{k\pi x}{2} dx + \int_4^6 2x\cos\frac{k\pi x}{2} dx \right) =$$

$$= \frac{2}{k\pi} \sin\frac{k\pi x}{2}\Big|_2^4 + \frac{2x}{k\pi} \sin\frac{k\pi x}{2}\Big|_2^4 - \frac{2}{k\pi} \int_4^6 \sin\frac{k\pi x}{2} dx =$$

$$= \frac{4}{k^2\pi^2} \cos\frac{k\pi x}{2}\Big|_4^6 = \frac{4}{k^2\pi^2}(\cos 3k\pi - \cos 2k\pi) = \frac{4}{k^2\pi^2}\left[(-1)^k - 1\right] =$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{8}{k^2\pi^2} & \text{при нечетном} \quad k; \\ 0 & \text{при четном} \quad k; \end{cases}$$

$$b_k = \frac{1}{\ell} \int_{\lambda}^{\lambda+2\ell} f(x) \sin\frac{k\pi x}{\ell} dx = \frac{1}{2} \int_2^6 f(x) \sin\frac{k\pi x}{2} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_2^4 2\sin\frac{k\pi x}{2} dx + \int_4^6 2x\sin\frac{k\pi x}{2} dx \right) =$$

$$= -\frac{2}{k\pi} \cos\frac{k\pi x}{2}\Big|_2^4 - \frac{2x}{k\pi} \cos\frac{k\pi x}{2}\Big|_4^6 + \frac{2}{k\pi} \int_4^6 \cos\frac{k\pi x}{2} dx =$$

$$= -\frac{2}{k\pi}\cos 2k\pi + \frac{2}{k\pi}\cos k\pi - \frac{12}{k\pi}\cos 3k\pi + \frac{8}{k\pi}\cos 2k\pi + \frac{4}{k^2\pi^2} \sin\frac{k\pi x}{2}\Big|_4^6 =$$

$$= \frac{6}{k\pi}\cos 2k\pi - 10\cos k\pi = \frac{6}{k\pi} + 10(-1)^{k+1}.$$

Следовательно, искомое разложение имеет вид

$$6+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{4}{k^2\pi^2}\left[(-1)^k-1\right]\cos\frac{k\pi x}{2}+\left[\frac{6}{k\pi}+10(-1)^{k+1}\right]\sin\frac{k\pi x}{2}\right\}.$$

Сумма полученного ряда $S(x)=2$ в интервале (2,4), $S(x)=2x$ в интервале (4,6) и

$$S(4)=\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to 4-0}f(x)+\lim_{x\to 4+0}f(x)\right]=\frac{1}{2}(2+8)=5.$$

в) Продолжая данную функцию нечетным образом, мы получим нечетную функцию $f(x)=\frac{1}{2}x$ на отрезке $[-\ell,\ell]$. Поэтому все коэффициенты a_k равны нулю, а коэффициенты b_k выражаются интегралами:

$$b_k=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}f(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx=\frac{1}{\ell}\int_0^{\ell}x\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx=$$

$$=\frac{1}{\ell}\left(-\frac{\ell x}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{\ell}\bigg|_0^{\ell}+\frac{\ell}{k\pi}\int_0^{\ell}\cos\frac{k\pi x}{\ell}dx\right)=-\frac{\ell}{k\pi}\cos k\pi+\frac{\ell}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi x}{\ell}\bigg|_0^{\ell}=$$

$$=\frac{(-1)^{k+1}\ell}{k\pi}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2}x=\frac{\ell}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin\frac{k\pi x}{\ell},\quad 0\le x<\ell.$$

В точке $x=\ell$ сумма ряда

$$S(\ell)=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to-\ell+0}\frac{1}{2}x+\lim_{x\to\ell-0}\frac{1}{2}x\right)=\frac{1}{2}\left(-\frac{\ell}{2}+\frac{\ell}{2}\right)=0.$$

г) Находим:

$$c_k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-ikx}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^xe^{-ikx}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{(1-ik)x}dx=$$

$$=\frac{1}{2\pi(1-ik)}e^{(1-ik)x}\bigg|_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{2\pi(1-ik)}\left(e^{\pi}e^{-ik\pi}-e^{-\pi}e^{ik\pi}\right).$$

По формулам Эйлера

$$e^{\pm ik\pi}=\cos k\pi\pm i\sin k\pi=(-1)^k,$$

следовательно,

$$c_k=\frac{(-1)^k}{2\pi(1-ik)}\left(e^{\pi}-e^{-\pi}\right).$$

Таким образом,

$$e^x=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_ke^{ikx}=\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^ke^{ikx}}{1-ik}\quad(-\pi<x<\pi).$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Дифференциальное и интегральное исчисление: Учебник.-2-е изд., перераб. и доп. / Бугров Я. С., Никольский С. М. ─М.: Наука, 1984.─ 431с.
2. Дифференциальное исчисление для втузов, Т.2:Учебник.-13-е изд. / Пискунов Н. С. -М.: Наука, 1985.─560 с.
3. Курс математического анализа, Т.1.: Учебник. / Кудрявцев Л. Д. ─М.: Высш. школа, 1981.─678 с.
4. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты): Учебное пособие / Л. А. Кузнецов.─М.: Высш. школа, 1983.─174 с.

Учебное издание.
Числовые функциональные ряды.
Ряды Фурье.

Методические указания к типовому расчету по высшей математике.

Составители: ЧУМАКИН Михаил Егорович
ПАВЛЕНКО Галина Дмитриевна

Редактор Н. А. Евдокимова

Подписано в печать 31. 01. 2003. Формат 60 х 84 / 16.
Бумага писчая. Печать трафаретная.
Усл. печ. л. 2,33. Уч.- изд. л. 2,00. Тираж 300 экз.
Заказ

Ульяновский государственный технический университет,

432027, г. Ульяновск, ул. Сев. Венец, д. 32.

Типография УлГТУ, 432027, г. Ульяновск, ул. Сев. Венец, д. 32.