ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ В КУРСЕ «МАТЕМАТИКА» ДЛЯ ГУМАНИТАРНЫХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

♦ ИЗДАТЕЛЬСТВО ТГТУ ♦

Министерство образования и науки Российской Федерации
Тамбовский государственный технический университет

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ В КУРСЕ «МАТЕМАТИКА» ДЛЯ ГУМАНИТАРНЫХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

Учебно-методические рекомендации

Тамбов
♦ Издательство ТГТУ ♦
2004

УДК 51(07)
ББК В126я73
Т33

Утверждено Редакционно-издательским советом университета

Рецензент

Доктор физико-математических наук, профессор
А.И. Булгаков

Составители:

Н.П. Пучков, Л.И. Ткач

Т33 Теория множеств в курсе «Математика» для гуманитарных специальностей: Учебно-метод. рекомендации. Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2004. 40 с.

Рассматривается один из основных разделов курса – «Теория множеств», имеющего своей целью развитие логики мышления будущих специалистов, для более глубокого и практико-ориентированного изучения курса математики, с которым студенты знакомятся на лекциях.

Предназначены студентам, обучающимся по специальностям «Юриспруденция» и «Связи с общественностью».

УДК 51(07)
ББК В126я73

Учебное издание

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ
В КУРСЕ «МАТЕМАТИКА»
ДЛЯ ГУМАНИТАРНЫХ
СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

Учебно-методические рекомендации

Составители: ПУЧКОВ Николай Петрович,
ТКАЧ Леонид Иванович

Редактор В.Н. Митрофанова
Инженер по компьютерному макетированию Т.А. Сынкова

Подписано к печати 28.12.2004
Формат 60 × 84 / 16. Бумага газетная. Печать офсетная
Гарнитура Times New Roman. Объем: 2,32 усл. печ. л.; 2,2 уч.-изд. л.
Тираж 200 экз. С. 906

Издательско-полиграфический центр
Тамбовского государственного технического университета
392000, Тамбов, Советская, 106, к. 14

Введение

Нужно ли студенту-гуманитарию изучать математику? Перед тем как ответить на этот вопрос, нужно прежде всего уточнить, а что же понимается под словом *математика*? В переводе с греческого $\mu\alpha\theta\eta\mu\alpha$ [матэма] − это «познание, знание путем рассуждения, наука». С древних времен математика рассматривалась как наиболее безупречный метод достижения достоверного знания о мире и в *любой* системе образования изучение математики и ее методов занимало достойное место. Например, в Древней Греции познание окружающего мира посредством умозрительного рассуждения возводилось в ранг религии. Еще раньше в Древнем Китае (VI – V вв. до н.э.) образованным считался тот, кто владел «шестью искусствами» (*лю и*), включавшими умение выполнять ритуалы, музицирование, стрельбу из лука, управление колесницей, умение читать и *считать*.

В средневековой Европе изучались «семь свободных искусств»: грамматика, риторика, диалектика, *арифметика*, *геометрия*, астрономия и теория музыки. В России, стараясь организовать «просвещение века», Петр I образовал *Математико*-навигационную школу …

Но для студента, только начавшего обучение в университете, математика − это то, чему его учили на уроках математики в школе: теоремы, уравнения, графики, … Естественно, эти воспоминания у студента-гуманитария, мысленно для себя уже простившегося с математикой, вызовут самые разнообразные чувства и дело здесь не в учителе и школе.

Человек, знающий математику лишь по школьному курсу, вряд ли осознает, сколь мизерное (но необходимое) количество знаний, накопленных к тому же задолго до нашего времени, сообщается в школе! Это всего лишь основание для здравой практической деятельности. На самом деле, математика − это намного больше, шире и интереснее. Да и кроме того, у каждого был свой путь при изучении математики.

Аналогичная ситуация получилась, если бы человек, только изучивший нотную грамоту, попал на концерт симфонической музыки. Едва ли он сумеет оценить, например, симфонию Шостаковича в полной мере. Для этого необходим существенный музыкальный багаж. С математикой − то же самое.

Таким образом, как кажется авторам, очень часто многие склонны отождествлять две довольно разные вещи − математику и *свое* представление о математике.

Так что же такое математика? На наш взгляд, на этот вопрос отвечают слова с которых начинается замечательная книга «Что такое математика?» Р. Курант, Г. Робинс: *Математика содержит в себе черты волевой деятельности*, *умозрительного рассуждения и стремления к эстетическому совершенству*.

Более того, сущность математики не в многочисленных теоремах, формулах, задачах, а в связях между ними или, если сказать более общими словами, в способах построения логических конструкций и рассуждений, с которыми было бы полезно ознакомиться (а еще лучше применять их) любому интеллектуально развитому человеку.

Можно возразить, что в наш век, когда объем информации увеличивается гигантскими темпами, целесообразно ли ограниченное время студента-гуманитария тратить на изучение математики, которая может быть и не пригодиться в его профессиональной деятельности?

Конечно, тот объем и та строгость изложения математики, которая преподается студенту-математику, явно не нужны студенту-гуманитарию. Но студенту-гуманитарию полезно и необходимо умение абстрактно мыслить, умение проводить аналогии между различными фактами, знание приемов рационального мышления, да и просто умение построить и провести убедительные рассуждения, четко выделяя промежуточные этапы (все это можно назвать *культурой мыслительной деятельности*). Именно математика, как никакой другой учебный предмет, развивает эти *человеческие* качества. Об этом говорили многие известные ученые прошлого.

Математика – это оружие для размышления.

Р. Фейнман

У человека, знающего математику, на один орган чувств больше.

Ч. Дарвин

Математику уже затем стоит изучать, что она ум в порядок приводит.

М.В. Ломоносов

В заключение, в подтверждение всего вышесказанного рассмотрим одну из часто встречающихся историй. Часто в журналах и газетах появляются «сенсационные» обзоры по исследованию египетских пирамид. Оказывается, как замечает какой-то журналист, что в размерах этих пирамид много таинственного. Например, отношение длины основания египетских пирамид к ширине равно, причем с большой степенью точности, числу π, а так как древние египтяне не знали об этом числе, то делается «сенсационный» вывод − пирамиды построили инопланетяне, которые и послали нам зашифрованное послание о числе π.

Человек, знающий о формуле длины окружности $C = \pi d$ и умеющий немного мыслить, будет «немного» удивлен. Куда проще предположить, что древние египтяне измеряли расстояние с помощью колеса, например, длину основания a пирамиды они отмерили некоторым числом оборотов (k оборотов) колеса, а ширину b отмерили таким же количеством диаметров того же колеса. Тогда отношение длины основания к ширине равно $\frac{a}{b} = \frac{\pi dk}{dk} = \pi$. «Сенсационный» факт!

Как вы думаете, было бы *полезно* этому журналисту умение анализировать, используя арифметические операции?

Авторы попытались построить курс по математике, отвечающий вышеуказанным требованиям, на основе «наивной» теории множеств, пронизывающей все разделы математики, выделив интересные и доступные (по мнению авторов) вопросы для студента-гуманитария.

Излагаемый в данной учебно-методической разработке материал в полной мере соответствует требованиям учебного плана по математике для студентов гуманитарных специальностей и может быть использован в процессе организации самостоятельной работы при подготовке к экзаменам и зачетам.

1 МНОЖЕСТВО

1.1 Понятие множества

Нет ни одной области математики, как бы абстрактна она ни была, которая когда-нибудь не окажется применимой к явлениям реального мира.

Н.И. Лобачевский

Любая область человеческой деятельности связана не только с одним предметом, объектом, а с целой совокупностью. Например: медицина изучает не одну отдельно взятую болезнь, а все болезни, зоология изучает не отдельно взятое животное, а совокупность всех животных.

Математика, как и другая область человеческих знаний, изучает те или иные объекты не каждый в отдельности, а в их связи между собой. Объекты, обладающие теми или иными общими свойствами, объединяются вместе в одну совокупность и изучаются совместно. Например, в геометрии изучают не один отдельно взятый треугольник, а отвлекаются от его положения на плоскости или даже от его размеров, получая теоремы, справедливые для всех равных или же подобных треугольников.

Естественно, на это обстоятельство математики давно обратили внимание. Но только в конце XIX в. немецкий математик Георг Кантор (1845 – 1918) создал общую теорию таких совокупностей, имеющей название «теория множеств», которая лежит в основе всей математики. Почему? Почти каждое издание по «современной» математике говорит о множествах и пестрит странными символами: $\in$, $\overline{\in}$, $\subseteq$, $\cup$, $\cap$, $\varnothing$. Дело в том, что теория множеств – это своего рода основа математического языка. Без него невозможно не только заниматься математикой, невозможно даже объяснить, о чем идет речь. Это все равно, что изучать китайскую литературу, не зная китайского языка.

К сожалению, понятию «множество» нельзя дать строгого определения. Разумеется, можно сказать, что множество[1] – это «совокупность», «семейство», «класс», « несколько объектов, объединенных некоторым общим признаком и рассматриваемых как одно целое» и т.д. Однако, это было бы не математическим определением, а скорее злоупотреблением словарным богатством русского языка.

Для того чтобы определить какое-то понятие, нужно прежде всего указать, частным случаем какого более общего понятия оно является. Для понятия множества сделать это невозможно, потому что более общего понятия, чем множество, в математике нет.

Человек, в процессе своего интеллектуального развития, приобретает смысл слова «множество» и математики этим пользуются, говоря, что «множество» – это основное (неопределяемое) понятие.

[1] По словам Георга Кантора, «множество – есть многое, мыслимое нами как единое целое».

Примеры. 1) Множество статей уголовного кодекса.

2) Множество студентов в группе.

3) Множество преподавателей в аудитории.

Определение. Объекты, составляющие данное множество называются его *элементами*.

Пример. Множество {*дни недели*} состоит из элементов*: понедельник*, *вторник*, *среда*, *четверг*, *пятница*, *суббота*, *воскресенье*.

Множества и их элементы обозначаются буквами. Мы будем использовать строчные буквы a, $в$, c, … для обозначения элементов, а прописные A, B, C, … – для обозначения множеств, хотя все это относительно, так как сами множества могут быть элементами других множеств.

Символ принадлежности общепринято имеет вид: $\in$. Тогда $a \in A$ читается как «элемент a принадлежит множеству A»; отрицание принадлежности обозначается как $\overline{\in}$ или $\notin$. Запись $d \notin B$ читается как «элемент d не принадлежит множеству B».

Пример. Если A – множество {*дни недели*}, то *суббота* $\in A$, а *январь* $\notin A$.

Задавать множества можно как угодно, лишь бы для каждого множества и каждого объекта можно было бы установить, является ли данный объект элементом данного множества.

Пример. $A = \{a_1; a_2; ...; a_n\}$ означает, что A состоит в точности из n элементов: a_i, $i = 1, \ldots, n$.

Определение. Множество, количество элементов которого, выражается некоторым числом, называется *конечным*.

Примеры. Множество студентов-отличников в университете, множество песчинок в мешке с песком.

Определение. Множество, в котором нет элементов, называется *пустое множество*.

Обозначается: $\varnothing$.

Пример. Множество людей, имеющих рост 0 м.

В пустом множестве количество элементов выражается числом 0, следовательно, оно конечное. Иногда бывает трудно сказать, пусты ли те или иные множества. Например, до сих пор неизвестно, пусто ли множество всех живых динозавров на земном шаре, – если чудовище озера Лох-Несс действительно окажется динозавром, то это множество не пусто.

Вопросы для самопроверки. Что следует понимать под множеством $A = \{\varnothing\}$? Верно ли равенство $A = \varnothing$? Перечислить элементы множества $B = \{\varnothing; \{\varnothing\}\}$.

Определение. Множество, не являющееся конечным, называется *бесконечным*.

Пример. Множество N натуральных чисел.

Если конечное множество можно задать, перечислив все элементы, то как же задавать бесконечные множества?

Бесконечные множества можно задавать указанием определяющего или *характеристического* свойства его элементов. Свойство называется характеристическим для некоторого множества, если этому множеству принадлежат в точности те элементы, которые обладают данными свойствами. Например: свойство «быть кубом целого числа» задает бесконечное множество кубов целых чисел. Это можно записать так $\{x$: x является кубом целого числа$\}$ (читается «множество тех x, которые являются кубами целых чисел»).

Вообще, обозначив символом $P(x)$ характеристическое свойство элементов множества A, будем писать: $A = \{x: P(x)\}$ (читается «множество A таких элементов x, для которых выполняется характеристическое свойство $P(x)$»).

В такой форме можно задавать любые (и конечные, и бесконечные) множества.

Примеры. 1) $\{x : x^2 - 3x + 2 = 0\}$ – множество корней уравнения $x^2 - 3x + 2 = 0$. Это конечное множество.

2) $\{r$: $r = \frac{p}{q}$, где p и q – целые числа, $q \neq 0\}$ – множество рациональных чисел. Это бесконечное множество.

3) {студент юр. фак-та: отличник} – множество отличников на юридическом факультете.

1.2 Числовые множества

Определение. Множества, элементами которых являются числа, называются *числовыми*.

Примеры. 1) N – множество всех натуральных чисел.

2) Z – множество всех целых чисел.
3) Q – множество всех рациональных чисел.
4) R – множество всех действительных чисел (или числовая прямая).

5 С каждым уравнением связаны два числовых множества. Первым из них является множество чисел, при которых выражения, входящие в уравнение имеют смысл. Это числовое множество называется *областью допустимых значений* уравнения. Вторым множеством, связанным с уравнением, является *множество решений* уравнения.

Например, в уравнении $x+3\sqrt{x}=4$ область допустимых значений $\{x : x \geq 0\}$, а множество решений: $\{1\}$.

Рассмотрим еще некоторые числовые множества. Пусть a, $b \in R$ и $a < b$. Множество $\{x\colon a \leq x \leq b\}$ – называется отрезком и обозначается $[a, b]$. Множество $\{x\colon a < x < b\}$ – называется интервалом и обозначается (a, b). Множества $\{x\colon a < x \leq b\}$ и $\{x\colon a \leq x < b\}$ – называются полуинтервалами и обозначаются соответственно: $(a, b]$, $[a, b)$.

Отрезки, интервалы и полуинтервалы называются промежутками, точки a и b – их концами.

Для любого $x \in R$ справедливо неравенство: $-\infty < x < +\infty$. Поэтому естественно ввести следующие обозначения для бесконечных промежутков:

$$(-\infty, +\infty) = \{x\colon -\infty < x < +\infty\};$$

$$(-\infty, a) = \{x\colon -\infty < x < a\};$$

$$(-\infty, a] = \{x\colon -\infty < x \leq a\};$$

$$(b, +\infty) = \{x\colon b < x < +\infty\};$$

$$[b, +\infty) = \{x\colon b \leq x < +\infty\}.$$

Со всеми этими числовыми множествами вы сталкивались в школьном курсе математики. Но есть и более сложные примеры числовых множеств, например, понятие *окрестности точки* $x_0 \in R$.

Определение. Окрестностью точки $x_0 \in R$ называется произвольный интервал (a, b), содержащий эту точку внутри себя: $a < x_0 < b$. Часто рассматривается такая окрестность точки x_0, для которой x_0 является серединой.

1.3 Подмножества

Нередко одно множество является частью другого множества. Например: множество всех женщин составляет часть множества всех людей; множество четных чисел – часть множества целых чисел. Для описания этой ситуации используется термин «подмножество».

Определение. Множество A называется *подмножеством* множества B, если каждый элемент множества A является элементом множества B.

Обозначение. $A \subset B$. Читается: «A есть подмножество множества B», или «A содержится (входит) в B», или «B содержит A».

Примеры. 1) $N \subset Z \subset Q \subset R$. (Множество натуральных чисел является подмножеством множества целых чисел, которое входит во множество рациональных чисел, которое, в свою очередь, содержится во множестве действительных чисел).

2) Многие теоремы в математике имеют вид: $A \subset B$. Например, в теореме «Диагонали ромба взаимно перпендикулярны» речь идет о двух множествах: A – множество всех ромбов, B – множество всех геометрических фигур с перпендикулярными диагоналями. И теорема состоит в том, что $A \subset B$.

Из определения подмножества видно, что всякое множество является подмножеством самого себя: $A \subset A$. Будем считать, что пустое множество $\varnothing$ есть подмножество любого множества: $\varnothing \subset A$.

Исключив эти «крайние» случаи (т.е. $\varnothing$, A), мы получим, так называемые, *собственные подмножества* множества A, т.е. такие, которые не пусты и не совпадают с A.

Определение. Множества A и B *равны*, если одновременно: $A \subset B$ и $B \subset A$ (т.е. *всякий элемент A принадлежит B и наоборот*).

***Обозначение*:** $A = B$.

В случае равенства множества A и B оказываются состоящими из одних и тех же элементов.

Примеры. 1) A есть множество корней уравнения $x^2 + 5x + 4 = 0$, B есть множество, состоящее из двух элементов: -1 и -4, $A = B$.

2) Все теоремы о том, что некоторое условие является необходимым и достаточным, – это теорема о совпадении двух множеств. Например: «Для того, чтобы параллелограмм был ромбом, необходимо и достаточно, чтобы его диагонали были взаимно перпендикулярны» (сравните с соответствующим примером выше).

3) В городе в течение некоторого времени совершено два похожих ограбления. Оказалось, что действовала одна и та же группировка. Если A – множество лиц, совершивших первое ограбление, а B – множество лиц, совершивших второе ограбление, то $A = B$.

1.4 Операции над множествами

Множества можно комбинировать между собой и получать другие множества. Среди бесчисленного количества мыслимых способов комбинирования некоторые оказались полезными.

Определение. *Объединением* (*суммой*) двух множеств A и B называется множество C, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A и B.

Обозначение: $C = A \cup B$.

Сделаем только одно очевидное замечание о том, что элементы, входящие в объединение множеств, нужно учитывать один раз.

Примеры. 1) $A = \{1;\ 2;\ 3\}$, $B = \{2;\ 3;\ 4;\ 5\}$, тогда $C = A \cup B = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5\}$.

2) $A = (-\infty, 2]$, $B = (1, +\infty)$, тогда $C = A \cup B = R$.

3) Если A – множество студентов, не сдавших первый экзамен, B – второй, то $A \cup B$ – множество студентов – задолжников после двух экзаменов (не исключено, что кто-то не сдал оба экзамена).

Аналогично определяется объединение любого количества множеств $A_1, A_2, ..., A_k, ...$.

***Обозначение*:** $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ... \cup A_n = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ – для конечного числа множеств;

$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k \cup \ldots = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ – для бесконечного (знаки стоящие в правых частях равенств называются *знаками сокращенного объединения* и нужны только для более краткой записи). Построенные объединения (суммы) состоят из всех элементов, входящих по крайней мере в одно из множеств A_k.

Пример. $A_k = \{k\}$ – натуральное число k, тогда

$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k \cup \ldots = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i = N$ – множество натуральных чисел.

Определение. *Пересечением* (*произведением*) множеств A и B называется множество C, состоящее из тех элементов, которые принадлежат одновременно каждому из множеств A и B.

***Обозначение*:** $C = A \cap B$.

Пример. Пусть $A = \{1;\ 2;\ 3\}$, $B = \{2;\ 3;\ 4;\ 5\}$, $D = \{10;\ 11\}$, тогда $C = A \cap B = \{2;\ 3\}$, $A \cap D = \varnothing$.

Аналогично определяется пересечение для любого количества множеств $A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots$.

***Обозначение*:** $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ – для конечного числа множеств,

$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k \cap \ldots = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ – для бесконечного числа множеств (знаки стоящие в правых частях равенств называются *знаками сокращенного пересечения* и нужны только для более краткой записи).

Пример. Студент, сдавший все экзамены на «отлично» получает повышенную стипендию. Сессия состоит из четырех экзаменов. Пусть A_i – множество студентов, сдавших i-й экзамен на «отлично» ($i = 1, 2, 3, 4$), тогда:

$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 = \bigcap\limits_{i=1}^{4} A_i$ – множество студентов, получающих повышенную стипендию.

Определение. *Разностью* множеств A и B называется множество C, состоящее из элементов множества A, не входящих в B.

***Обозначение*: $C = A \setminus B$.**

Примеры. 1) $A_1 \setminus A_2$ – множество студентов, получивших «отлично» на первом экзамене, а на втором – другую оценку (см. предыдущий пример).

2) $R \setminus Q$ – множество иррациональных чисел.

3) $Q \setminus R = \varnothing$.

Определение. Если $B \subset A$, то множество $C = A \setminus B$ называется *дополнением* множества B до множества A.

***Обозначение*:** $\overline{B}$ или $\overline{B}_A$.

Пример. A – множество студентов в группе.

B – множество студентов, сдавших первый экзамен, то $\overline{B}$ – множество студентов, не сдавших первый экзамен.

Обычно все множества, которые рассматриваются в том или ином рассуждении, являются подмножествами некоторого фиксированного множества I. Это множество называется *универсальным*.

Задача. Пусть универсальным множеством I является множество всех учащихся данной школы. Какие множества при этом условии можно рассматривать?

Ответ. Множества, состоящие только из учащихся данной школы.

Операции над множествами имеют наглядное представление с помощью диаграмм[2], на которых множества представлены в виде кругов, и те области, где лежат нужные элементы, выделены штриховкой на рис. 1. Эти диаграммы называются *диаграммами Венна*[3] (или *диаграммами Эйлера*[4]*–Венна*):

Есть и другой способ проиллюстрировать операции над множествами. Это, так называемая, *таблица вхождения элементов в множества*, в которой рассматриваются все возможные случаи вхождения выбранного элемента в множества A и B и их комбинации. Результат принадлежности этого элемента множествам A и B отмечают в первых двух столбцах таблицы по правилу: 1 – если элемент входит в данное множество, 0 – если не входит. Получится четыре случая или четыре строчки в таблице. Столбцы, соответствующие операциям $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, заполняются согласно определений этих операций (табл. 1).

Например, вторая строка в табл. 1 читается так: если элемент входит в A, но не входит в B, то он входит в $A \cup B$, не входит в $A \cap B$, но входит в $A \setminus B$.

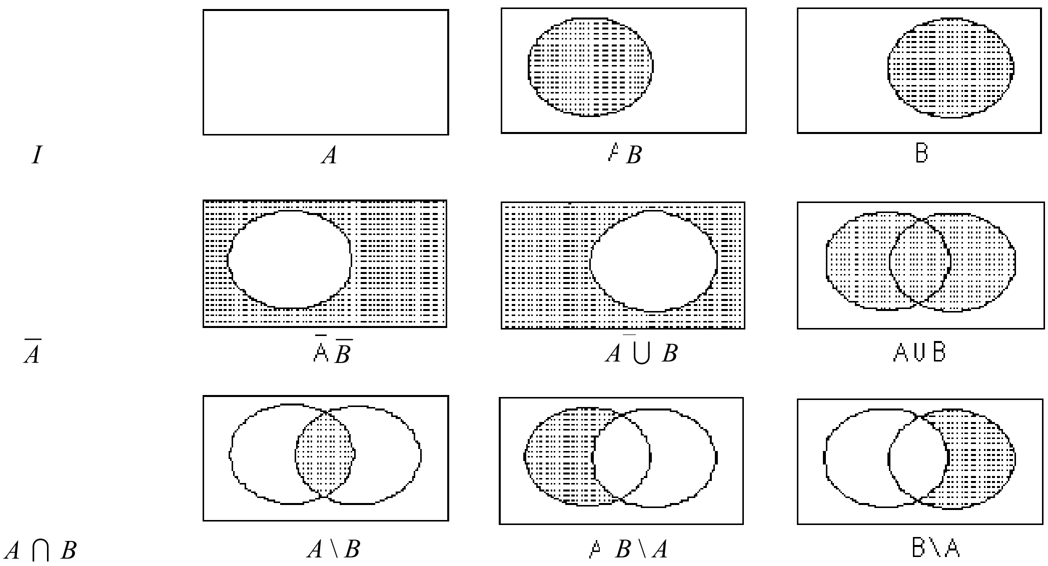

Рис. 1

Таблица 1

[2] В переводе с греческого диаграмма – изображение, рисунок, чертеж.
[3] Джон Венн (1834 – 1923) – английский логик.
[4] Леонард Эйлер (1707 – 1783) – швейцарский математик, долгое время работавший в России.

A	B	$A \cup B$	$A \cap B$	$A \setminus B$
1	1	1	1	0
1	0	1	0	1
0	1	1	0	0
0	0	0	0	0

Рассмотрим некоторые важные свойства операций объединения, пересечения и разности. Пусть A, B, C являются подмножествами для I. Тогда (для удобства в дальнейшем будем нумеровать формулы параллельно, используя обыкновенную нумерацию и со штрихом):

1) $A \cup B = B \cup A$; 1') $A \cap B = B \cap A$

(эти тождества выражают *коммутативность*[5] операций объединения и пересечения);

2) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$; 2') $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(эти тождества выражают *ассоциативность*[6] операций объединения и пересечения);

3) $A \cup A = A$; 3') $A \cap A = A$

(эти тождества называются *законами идемпотентности*[7]);

4) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

4') $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(эти тождества называются *законами дистрибутивности*[8]);

5) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$; 5') $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

(эти тождества называются *законами де Моргана*[9]);

6) $A \cup \varnothing = A$; 6') $A \cap I = A$;

7) $A \cup \overline{A} = I$; 7') $A \cap \overline{A} = \varnothing$.

Докажем свойство 5 на основе таблицы вхождения элементов в множества (табл. 2).

Таблица 2

A	B	$A \cup B$	$\overline{A \cup B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \cap \overline{B}$
1	1	1	**0**	0	0	**0**
1	0	1	**0**	0	1	**0**
0	1	1	**0**	1	0	**0**
0	0	0	**1**	1	1	**1**

Из таблицы вхождения элементов в множества видно, что при различных вариантах вхождения элемента в множества A, B он входит или не входит в левую и правую части доказываемого равенства одновременно (см. четвертый и седьмой столбцы). Значит $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Впервые система множеств с тремя операциями, удовлетворяющими свойствам 1 − 7, 1' − 7', рассматривалась английским математиком Джорджем Булем (1815 – 1864), в связи с чем такие системы множеств получили название *булевых алгебр*.

Задача. Вытекает ли из $A \setminus B = C$, что $A = B \cup C$? И наоборот, вытекает ли из $A = B \cup C$, что $A \setminus B = C$?

Решение. Рассмотрим первый вопрос задачи. Запишем равенство $A = B \cup C$ несколько в другом виде: $A = B \cup C = B \cup (A \setminus B)$. Проверим получившееся соотношение $A = B \cup (A \setminus B)$.

[5] От латинского слова: commutatius – меняющийся, переставляющий.
[6] От латинского слова: assotiatio – соединение.
[7] От латинских слов: idem – тот же самый, и potens – способный.
[8] От латинского слова: distributivus – распределительный.
[9] А. де Морган (1806 – 1871) – шотландский математик.

Мы видим (табл. 3), что столбцы, соответствующие A и $B \cup (A \setminus B)$ не совпадают, следовательно, из условия $A \setminus B = C$ не следует, что $A = B \cup C$. В то же время можно утверждать, что $A \subset B \cup C$.

Таблица 3

A	B	$A \setminus B$	$B \cup (A \setminus B)$
0	0	0	**0**
0	1	0	**1**
1	0	1	**1**
1	1	0	**1**

Рассмотрим второй вопрос: пусть $A = B \cup C$, верно ли, что в этом случае $A \setminus B = C$ (или $(B \cup C) \setminus B = C$)?

Третий и четвертый столбцы не совпадают (табл. 4), поэтому и это равенство неверное. На самом деле: $(B \cup C) \setminus B \subset C$.

Таблица 4

B	C	$B \cup C$	$(B \cup C) \setminus B$
0	0	**0**	**0**
0	1	**1**	**1**
1	0	**1**	**0**
1	1	**1**	**0**

1.5 Задачи по теме «Множество»

Умение решать задачи – практическое искусство, подобное плаванию, или катанию на лыжах, или игре на фортепьяно: научиться этому можно, лишь подражая избранным образцам и постоянно тренируясь …

Д. Пойа

1 Пусть A – множество корней уравнения $x^2 - 3x + 2 = 0$, а $B = \{0; 2\}$. Найти $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

2 Двое играют в шахматы. Обозначим: A – множество партий, в которых выиграл первый игрок, B – множество партий, в которых выиграл второй игрок. Описать множества:

а) $A \cup B$;
б) $\overline{A \cup B}$;
в) $A \cap B$;
г) $\overline{A} \cap \overline{B}$;
д) $\overline{B} \setminus A$;
е) $\overline{A} \setminus B$;
ж) $B \setminus A$;
з) $A \setminus \overline{B}$.

3 Как вы думаете, почему пустое множество является подмножеством любого другого множества?

Ответ. Одно из возможных обоснований: для любого множества A справедливы соотношения $\varnothing \subset A \cup \varnothing = A$, $\varnothing = A \cap \varnothing \subset A$.

4 Мишень состоит из десяти кругов, ограниченных концентрическими окружностями с радиусами $R_1 < R_2 < \ldots < R_{10}$. Множество A_k есть множество попаданий в круг радиуса R_k. Описать множества:

а) $B = A_1 \bigcup A_3 \bigcup A_6$;

б) $C = A_2 \bigcap A_4 \bigcap A_6 \bigcap A_8$;

в) $D = (A_1 \bigcup A_3) \bigcap A_6$.

5 Даны множества A и B, причем $A \subset I$, $B \subset I$, I – некоторое множество и $A \bigcap B = \varnothing$. Изобразите при помощи диаграмм Венна следующие множества:

а) $\overline{A \bigcap B}$;

б) $A \bigcap \overline{B}$;

в) $\overline{A} \bigcap \overline{B}$;

г) $\overline{A \bigcup B}$;

д) $\overline{A} \bigcup \overline{B}$;

е) $\overline{A} \bigcup B$;

ж) $\overline{A} \setminus B$;

з) $A \setminus \overline{B}$.

6 Обязаны ли совпадать множества A и B, если:

а) $\overline{A} = \overline{B}$;

б) $A \bigcup C = B \bigcup C$ (C – некоторое множество);

в) $A \bigcap C = B \bigcap C$ (C – некоторое множество);

г) $A \bigcap (A \bigcup B) = B \bigcap (A \bigcup B)$;

д) $A \bigcap (A \setminus B) = B \bigcap (B \setminus A)$;

е) $A \bigcap (A \setminus B) = B \bigcap (A \setminus B)$;

ж) $A \setminus B = \varnothing$.

В случае возможного несовпадения множеств A и B, привести соответствующий пример, используя диаграммы Венна.

7 Для каких множеств A и B верно равенство: $A \bigcap B = A$?

8 Для каких множеств A и B верно равенство: $A \bigcap B = A \bigcup B$?

9 Найти все множества X такие, что: $(\overline{X \bigcup A}) \bigcup (\overline{X \bigcup \overline{A}}) = B$, где A и B – некоторые множества.

Решение. Заметим, что $\overline{B} = (X \bigcup A) \bigcap (X \bigcup \overline{A}) = X \bigcap (A \bigcup \overline{A}) = X$.

Ответ. $X = \overline{B}$.

10 Пусть A и B – некоторые множества. Найти все такие множества X, что: $A \bigcap X = A \bigcap B$.

11 Определить подмножества A и B множества C, если

а) $A \bigcup B = \overline{A}$;

б) $A \bigcap B = \overline{A}$.

12 Доказать, что для любых множеств A и B соотношения $A \subset B$, $\overline{A} \supset \overline{B}$, $A \bigcup B = B$, $A \bigcap B = A$, $A \setminus B = \varnothing$ равносильны.

13 Какое из двух множеств является подмножеством другого:

а) P и $P \bigcap Q$;

б) P и $P \bigcup Q$.

14 Какие из следующих равенств верны для любых множеств, верны для некоторых множеств, бессмысленны:

а) $P \bigcup Q = Q \bigcup P$;

б) $P \bigcap Q = Q \bigcap P$;

в) $P \bigcup P = 2P$;

г) $P \bigcap P = P^2$;

д) $P \bigcup (Q \bigcup R) = (P \bigcup R) \bigcup Q$;

е) $P \bigcap (Q \bigcap R) = (Q \bigcap P) \bigcap R$;

ж) $P \bigcup Q = P \bigcap Q$;

з) $P \bigcup (Q \bigcap R) = (P \bigcup Q) \bigcap R$?

15 Доказать тождества:

а) $(A \setminus B) \bigcap C = (A \bigcap C) \setminus (B \bigcap C)$;

б) $A \bigcap B \bigcap C = A \setminus (A \setminus (B \bigcap C))$;

в) $(A \setminus B) \bigcup (A \setminus C) = A \setminus (B \bigcap C)$;

г) $(A \setminus B) \bigcap (A \setminus C) = A \setminus (B \bigcup C)$;

д) $(A \setminus B) \bigcup (B \setminus C) \bigcup (C \setminus A) \bigcup (A \bigcap B \bigcap C) = A \bigcup B \bigcup C$;

е) $\overline{A \setminus B} = \overline{A} \bigcup (A \bigcap B)$;

ж) $\overline{A} \bigcup \overline{(B \bigcup C)} = \overline{(A \bigcap B)} \bigcap \overline{(A \bigcap C)}$.

16 Докажите включения:

а) $A \bigcap B \subset A \bigcup B$;

б) $(A \bigcap C) \bigcup (B \bigcap D) \subset (A \bigcup B) \bigcap (C \bigcup D)$;

в) $(B \setminus C) \setminus (B \setminus A) \subset A \setminus C$;

г) $A \setminus C \subset (A \setminus B) \bigcup (B \setminus C)$;

д) $(A \bigcup C) \setminus B \subset (A \setminus B) \bigcup C$.

Пример доказательства включения в) (табл. 5).

Таблица 5

A	**B**	**C**	$B \setminus C$	$B \setminus A$	$(B \setminus C) \setminus (B \setminus A)$	$A \setminus C$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	1	1	0	0
1	0	0	0	0	0	1
0	1	1	0	1	0	0
1	1	0	1	0	1	1
1	0	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0

Рассматривая разные варианты вхождения элемента в множества *A*, *B*, *C* (табл. 5), мы видим, что, если элемент входит в $(B \setminus C) \setminus (B \setminus A)$, то он входит и в $A \setminus C$, т.е. $(B \setminus C) \setminus (B \setminus A) \subset A \setminus C$.

17 Какие включения справедливы для множеств:

а) $A \setminus (B \bigcup C)$ и $(A \setminus B) \setminus C$;

б) $A \bigcup (B \setminus C)$ и $(A \bigcup B) \setminus C$;

в) $(A \setminus B) \bigcup C)$ и $A \bigcup (C \setminus B)$?

18 Пусть универсальным множеством является множество точек плоскости. Записать и изобразить дополнение следующих множеств:

а) $A = \{(x, y): x^2 + y^2 < 1\}$;

б) $A = \{(x, y): x^2 + 3x + 2 \le 0\}$;

в) $A = \{(x, y): 3x + 2y + 5 > 0\}$;

г) $A = \{(x, y): |x| \le 2\}$;

д) $A = \left\{(x, y): \begin{cases} (x^2 - 1)(y^2 - 1) = 0 \\ x^2 + y = 4 \end{cases}\right\}$.

19 Используя операции над множествами, выразить множество $A=\left\{x:\dfrac{\sqrt{h(x)}}{f(x)\,g(x)}\geq 0\right\}$ через множества $B=\{x:h(x)>0\}$, $C=\{x:h(x)=0\}$, $D=\{x:f(x)>0\}$, $E=\{x:f(x)=0\}$, $G=\{x:g(x)>0\}$, $F=\{x:g(x)=0\}$. Проверить ответ, решив неравенство $\dfrac{\sqrt{x^2-x-6}}{(x-1)(x+4)}\geq 0$.

2 КОНЕЧНЫЕ МНОЖЕСТВА

2.1 Количество подмножеств конечного множества

Рассмотрим более подробно конечные множества. Для конечного множества очевидно, что число его подмножеств конечно. Можно ли подсчитать число подмножеств, если известно число элементов данного конечного множества? Решим предварительно задачу.

Задача. Пусть X – конечное множество, a – элемент множества X. Каких подмножеств множества X больше, содержащих элемент a или не содержащих элемент a?

Решение. Каждый раз, когда мы указываем подмножество A множества X, содержащее элемент a, то мы указываем и подмножество $X \setminus A$ множества X, не содержащее элемент a, и наоборот. Если мы указываем подмножество множества X, не содержащее элемент a, то мы указываем и подмножество множества X, содержащее элемент a. Поэтому подмножеств множества X, содержащих элемент a столько же, сколько и подмножеств множества X, не содержащих элемент a.

Ответ. Поровну.

Проверим ответ данной задачи на следующем примере.

Пример. У множества $\{1, 2, 3\}$ есть следующие подмножества:

$$\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\};$$

$$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\};$$

$$\{1, 2, 3\}.$$

Таким образом, подмножеств, содержащих элемент 2, четыре штуки, столько же подмножеств, не содержащих элемент 2.

Используем решенную задачу для доказательства основной теоремы.

Теорема 1. *Число подмножеств конечного множества, состоящего из n элементов, равно* 2^n.

Доказательство. Множество, состоящее из одного элемента a, имеет два (т.е. 2^1) подмножества: $\varnothing$ и $\{a\}$. Множество, состоящее из двух элементов a и b, имеет четыре (т.е. 2^2) подмножества:

$$\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a; b\}.$$

Множество, состоящее из трех элементов a, b, c, имеет восемь (т.е. 2^3) подмножеств:

$$\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{b; a\}, \{c\}, \{c; a\}, \{c; b\}, \{c; b; a\}.$$

Можно предположить, что добавление нового элемента удваивает число подмножеств.

Завершим доказательство применением метода математической индукции. Сущность этого метода в том, что если утверждение (свойство) справедливо для некоторого начального натурального числа n_0 и если из предположения, что оно справедливо для произвольного натурального $n = k \geq n_0$ можно доказать его справедливость для числа $k + 1$, то это свойство справедливо для всех натуральных чисел.

1 Для $n = 1$ (и даже для $n = 2, 3$) теорема доказана.

2 Допустим, что теорема доказана для $n = k$, т.е. число подмножеств множества, состоящего из k элементов, равно 2^k. Докажем, что число подмножеств множества B, состоящего из $n = k + 1$ элемента равно 2^{k+1}.

Выбираем некоторый элемент b множества B. Рассмотрим множество $A = B \setminus \{b\}$. Оно содержит k элементов. Все подмножества множества A – это подмножества множества B, не содержащие элемент b и, по предположению, их 2^k штук. Подмножеств множества B, содержащих элемент b, столько же, т.е. 2^k штук (по решенной задаче). Следовательно, всех подмножеств множества B: $2^k + 2^k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$ штук. Теорема доказана.

Задача. Преступники решили ограбить дом, в котором проживает семья из пяти человек: муж, жена, двое детей и мать жены. Сколько различных ситуаций (по количеству людей, находящихся в доме) их может ожидать?

Ответ. $2^5 = 32$ ситуации.

2.2 Формула включений и исключений

Пусть конечное множество A представлено как объединение некоторых конечных множеств $A_1, \ldots, A_n$: $A = A_1 \cup \ldots \cup A_n$. Как связаны количества элементов в множестве A и в множествах $A_1, \ldots, A_n$? Для случая $n = 2$ на этот вопрос ответить легко.

Обозначим через $m(A)$ («мера множества A») количество элементов в конечном множестве A. Тогда:

1 Если A_1 и A_2 конечные множества и $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, то: $m(A_1 \cup A_2) = m(A_1) + m(A_2)$.

2 Если A_1 и A_2 конечные множества и $A_1 \cap A_2 \neq \varnothing$, то: $m(A_1 \cup A_2) = m(A_1) + m(A_2) - m(A_1 \cap A_2)$, так как общие элементы множеств A_1 и A_2 включаются в объединение только один раз (см. диаграмму Венна).

Задача. Из 220 школьников 163 умеют играть в хоккей, 175 – в футбол, 24 не умеют играть в эти игры. Сколько школьников одновременно умеет играть в хоккей и футбол?

Решение. Введем обозначения: Ш – множество всех школьников, m(Ш) = 220, Ф – множество школьников, умеющих играть в футбол, m(Ф) = 175, Х – множество школьников, умеющих играть в хоккей, m(Х) = 163, Ф $\cap$ Х – множество школьников, умеющих играть и в футбол, и в хоккей, Ф $\cup$ Х – множество школьников, умеющих играть хотя бы в одну из игр – или в футбол, или в хоккей. По условию 24 школьника не умеют играть в эти игры, следовательно:

$$m(\text{Ф} \cup \text{Х}) = m(\text{Ш}) - 24 = 196.$$

Окончательно: $m(\text{Ф} \cup \text{Х}) = m(\text{Ф}) + m(\text{Х}) - m(\text{Ф} \cap \text{Х})$, откуда

$$m(\text{Ф} \cap \text{Х}) = m(\text{Ф}) + m(\text{Х}) - m(\text{Ф} \cup \text{Х}) = 175 + 163 - 196 = 142.$$

Ответ. 142 школьника играют и в футбол, и в хоккей.

На самом деле формула $m(A_1 \cup A_2) = m(A_1) + m(A_2) - m(A_1 \cap A_2)$ является частным случаем формулы включений и исключений, которая отвечает на вопрос, поставленный в начале, для любого натурального n.

Теорема 2. *Если $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – некоторые конечные множества, то*:

$$\begin{aligned}
&m(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \\
&= [m(A_1) + \ldots + m(A_n)] - [m(A_1 \cap A_2) + m(A_1 \cap A_3) + \ldots + m(A_{n-1} \cap A_n)] + \\
&+ [m(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \ldots + m(A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n)] - \ldots + \\
&+ (-1)^{n-1} [m(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)].
\end{aligned}$$

Поясним формулировку этой теоремы. Правая часть формулы в теореме представляет собой алгебраическую сумму n слагаемых (взятых в квадратные скобки), имеющих попеременно знак «+» и «–». Первое слагаемое – число элементов, входящих хотя бы в одно из множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$, второе – число элементов, входящих хотя бы в одно из множеств $A_i \cap A_j$ ($i < j$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n$), третье – число элементов, входящих хотя бы в одно из множеств $A_i \cap A_j \cap A_k$ ($i < j < k$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, n$) и так далее. Последнее слагаемое, взятое со знаком $(-1)^{n-1}$, – число элементов в множестве $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$. Такое попеременное включение и исключение слагаемых с целью учета каждого элемента только один раз и послужило причиной для названия этой формулы: *формула включений и исключений*.

Эту формулу можно доказать, используя метод математической индукции. Мы ограничимся ее доказательством только для случая $n = 3$, то есть покажем, что

$$m(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = m(A_1) + m(A_2) + m(A_3) -$$
$$-\left[m(A_1 \cap A_2) + m(A_1 \cap A_3) + m(A_2 \cap A_3)\right] + m(A_1 \cap A_2 \cap A_3).$$

Доказательство. Чтобы не писать индексы, рассмотрим множества A, B, C. Используя очевидное равенство $A \cup B \cup C = A \cup (B \cup C)$ и то, что эта формула доказана для двух множеств, получим:

$$m(A \cup B \cup C) = m(A \cup [B \cup C]) = m(A) + m(B \cup C) - m(A \cap [B \cup C]),$$

Так как $A \cap [B \cup C] = [A \cap B] \cup [A \cap C]$ (свойство 4'), то:

$$m(A) + m(B \cup C) - m(A \cap [B \cup C]) = m(A) + m(B \cup C) - m([A \cap B] \cup [A \cap C]),$$

Применяя формулу включений и исключений для двух множеств еще два раза, получим:

$$m(A) + m(B \cup C) - m([A \cap B] \cup [A \cap C]) = m(A) + m(B) + m(C) -$$
$$- m(B \cap C) - (m(A \cap B) + m(A \cap C) - m[A \cap B] \cap [A \cap C]).$$

После очевидных преобразований, получим в итоге доказываемую формулу:

$$m(A \cup B \cup C) =$$
$$= m(A) + m(B) + m(C) - m(B \cap C) - m(A \cap B) - m(A \cap C) + m(A \cap B \cap C).$$

Следствие: *Если множества* A_1, A_2, …, A_n *попарно не пересекаются*, *то*:

$$m(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = m(A_1) + m(A_2) + \ldots + m(A_n).$$

Задача. В студенческой группе 25 человек. Во время летних каникул 9 из них выезжали в турпоездки за границу, 12 – путешествовали по России, 15 – отдыхали в Сочи, 6 – путешествовали за границей и по России,
7 – были и за границей и в Сочи, 8 – и путешествовали по России и были в Сочи и 3 – участвовали во всех трех поездках. Сколько студентов никуда не выезжало?

Решение. Пусть:

Г – множество студентов, выезжавших за границу;

Р – множество студентов, путешествовавших по России;

С – множество студентов, отдыхавших в Сочи.

Тогда множество студентов, выезжавших хотя бы куда-то из города есть $\Gamma \cup \mathrm{P} \cup \mathrm{C}$. Так как 9 + 12 + 15 = 36 > 25, то множества Г, Р, С пересекаются (это видно и непосредственно из условия задачи, так как некоторые студенты были в различных поездках) и

$$m(\Gamma \cup \mathrm{P} \cup \mathrm{C}) =$$
$$= m(\Gamma) + m(\mathrm{P}) + m(\mathrm{C}) - m(\Gamma \cap \mathrm{P}) - m(\Gamma \cap \mathrm{C}) - m(\mathrm{P} \cap \mathrm{C}) + m(\Gamma \cap \mathrm{P} \cap \mathrm{C}).$$

Имеем: $m(\Gamma) = 9$, $m(\mathrm{P}) = 12$, $m(\mathrm{C}) = 15$, $m(\Gamma \cap \mathrm{P}) = 6$, $m(\Gamma \cap \mathrm{C}) = 7$, $m(\mathrm{P} \cap \mathrm{C}) = 8$, $m(\Gamma \cap \mathrm{P} \cap \mathrm{C}) = 3$.

Тогда: $m(\Gamma \cup \mathrm{P} \cup \mathrm{C}) = 9 + 12 + 15 - 6 - 7 - 8 + 3 = 39 - 21 = 18$, а из города никуда не выезжало 25 – 18 = 7 студентов.

Ответ. Никуда не выезжало 7 студентов.

2.3 Задачи по теме «Конечные множества»

1 Пусть X – конечное множество, $A \subset X$. Каких подмножеств множества X больше, содержащих множество A или не пересекающихся с множеством A?

2 Пусть X – конечное множество, A – подмножество множества X. Каких подмножеств множества X больше, содержащих множество A или не содержащих множество A?

3 По итогам экзаменов из 37 студентов отличную оценку по математике имели 15 студентов, по физике – 16, по химии – 19, по математике и физике – 7, по математике и химии – 9, по физике и химии – 6, по всем трем предметам – 4. Сколько студентов получили хотя бы по одной отличной оценке?

Приведем только фрагменты решения. Дополните (*вместо...*) *самостоятельно до завершенного решения.*

Решение. Обозначим:
М – множество студентов, получивших «5» по математике;
Ф – ...;
Х – ... .

Тогда, множество студентов, получивших хотя бы одну отличную оценку есть: М ... Ф ... X.

$$15 + 16 + 19 = 50 > 37.$$

Следовательно, множества М, Ф и X пересекаются.

$$m(\text{М} \cup \text{Ф} \cup X) = m(\text{М}) + ... = 15 + 16 + 19 - ... + 4 = 32.$$

Ответ. ... .

4 В течение 30 дней сентября было 12 дождливых, 8 ветреных, 4 холодных, 5 дождливых и ветреных, 3 дождливых и холодных, 2 ветреных и холодных, а один день был и дождливый, и ветреный, и холодный. В течение скольких дней в сентябре была хорошая погода?

5 В классе 35 учащихся. Из них 20 посещают математический кружок, 11 – физический, 10 учеников не посещают ни одного из этих кружков. Сколько учеников посещают и математический, и физический кружок? Сколько учащихся посещают только математический кружок?

6 Староста курса представил следующий отчет о физкультурной работе: Всего – 45 студентов. Футбольная секция – 25 человек, баскетбольная секция – 30 человек, шахматная секция – 28 человек, футбольная и баскетбольная – 16, футбольная и шахматная – 18, баскетбольная и шахматная – 17. В трех секциях одновременно занимаются 15 человек. Объясните, почему отчет не был принят?

7 В одном из отделов научно-исследовательского института работают несколько человек, каждый из которых знает хотя бы один иностранный язык, причем 6 человек знают английский язык, 6 – немецкий язык, 7 – французский язык, 4 знают английский и немецкий, 3 – немецкий и французский, 2 – французский и английский, один человек знает все три языка. Сколько человек работает в отделе? Сколько человек знает только один язык?

8 Сколько существует целых чисел от 1 до 1000, которые не делятся ни на 5, ни на 7?

Указание. Для подсчета количества чисел от 1 до 1000, делящихся на 5 (или на 7), можно использовать функцию $y = E(x)$ – целая часть x (наибольшее целое число не превосходящее x). Например, количество чисел от 1 до 1000, делящихся на 7 равно $E\left(\frac{1000}{7}\right) = E(142{,}85...) = 142$.

9 Сколько существует целых чисел от 1 до 1000, которые не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5, ни на 7?

10 Сколько натуральных чисел от 1 до 1000 не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5?

11 Выбрано некоторое множество натуральных чисел. Известно, что среди них имеется 100 чисел, кратных 2; 115 чисел, кратных 3; 120 чисел, кратных 5; 45 чисел, кратных 6; 38 чисел, кратных 10; 50 чисел, кратных 15; 20 чисел, кратных 30. Сколько элементов в заданном множестве?

12 а) Из 100 школьников 40 играют в футбол, а 50 в волейбол. Что можно сказать о числе школьников, играющих в обе игры? О числе школьников, играющих хотя бы в одну из этих игр?

б) Из 80 школьников 40 играют в футбол, а 50 в волейбол. Что можно сказать о числе школьников, играющих в обе игры? О числе школьников, играющих хотя бы в одну из этих игр?

13 В колонии находится 500 заключенных, каждый из которых осужден хотя бы по одной статье (№ *A*, № *B*, № *C*) Уголовного кодекса. Известно, что к 127 заключенным применялась статья *A*, к 210 – статья *B*, к 260 – статья *C*, к 80 – одновременно и статья *A* и статья *B*, к 20 – статьи *A* и *C* и к 45 – статьи *B* и *C*. Имеются ли в колонии заключенные, осужденные по всем трем статьям и, если имеются, то сколько их?

14 На бал в Санкт-Петербург приехала известная модница княгиня Ростовская. Некоторые фрейлины, узнав об этом, купили себе такие же подвески, серьги и кольца. Из 115 фрейлин, присутствовавших на балу, 31 была в таких же подвесках, 45 − в серьгах и 50 − в кольцах. 36 фрейлин надели подвески и серьги, 23 − надели подвески и кольца, 27 − кольца и серьги. А самыми модными оказались 15 фрейлин, которые надели и подвески, и серьги, и кольца, такие же как у княгини Ростовской. Сколько фрейлин не знало о приезде княгини Ростовской?[10]

15 17 арабов нашли волшебную лампу с джином и попросили у него исполнить их желания. 9 арабов захотели много золота, 4 − большой и красивый дворец, 6 − женский гарем. Одновременно золото и дворец попросили трое, гарем и золото − десять, дворец и гарем − трое арабов. Сколько арабов попросили все это вместе, если известно, что джин для каждого исполнил желание?

16 Из 21 дня, проведенного в санатории, 12 дней я принимал лечебные процедуры, 5 дней ездил на экскурсии. Сколько у меня было свободных дней, если 3 дня я сочетал лечебные процедуры и экскурсии?

17 В деревне 500 пожилых женщин смотрят бразильский сериал. Из них 155 переживают за Марию Антонио, 108 интересуются жизнью Педро, 134 волнует судьба Хосе Игнасио, 48 женщин переживают за отношения Марии Антонио и Хосе Игнасио, 35 − волнуются за Марию Антонио и Педро, 17 − подозревают о родственных связях Хосе Игнасио и Педро, 23 женщины верят в счастье всех трех главных героев. А сколько женщин в деревне, смотрящих сериал, вообще ни за кого из главных героев не переживают и не верят в их счастье?

18 В племени Майя 37 индейцев. 12 из них на голове носят красные перья, 14 − синие, 17 − белые, 9 − красные и синие, 5 − красные и белые, 3 − синие и белые. Есть ли в племени Майя индейцы, у которых присутствуют перья всех трех цветов и если есть, то сколько?

3 ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

3.1 Основные правила комбинаторики

Комбинаторика – это область математики, в которой изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций[11], подчиненных тем или иным условиям, можно составить из конечного числа заданных объектов.

Комбинаторику можно рассматривать как часть теории множеств – любую комбинаторную задачу можно выразить, используя понятие конечного множества. В этом читатель может убедиться самостоятельно.

Итак, в комбинаторике изучаются некоторые операции над конечными множествами. При этом используются два основных правила комбинаторики – правило суммы и правило произведения.

Правило суммы. Если элемент a из конечного множества можно выбрать m способами, а элемент b – n способами, причем любой выбор элемента a не совпадает с каким-нибудь способом выбора элемента b, то выбор «a или b» можно осуществить $m + n$ способами.

Правило суммы можно распространить на выбор любого конечного числа элементов.

Пример. На полке в книжном шкафу стоят 25 книг, среди которых учебники: 5 книг по математике, 4 книги по физике, 6 книг по химии, остальные книги – художественная литература. Сколькими способами можно выбрать учебник с этой полки?

[10] Эту и последующие задачи предложили студенты.
[11] Комбинация (лат. combinatio) – объединение (в данном случае, как результат) некоторых объектов в единое целое.

Взять любую из 5 книг по математике можно 5 способами, книгу по физике – 4 способами, книгу по химии – 6 способами. Выбор одной книги не влияет на выбор другой книги. Значит, по правилу суммы учебник с полки можно выбрать $5 + 4 + 6 = 15$ способами.

Правило произведения. Если элемент a из конечного множества можно выбрать m способами и после любого из этих выборов элемент b может быть выбран n способами, то выбор «a и b» может быть осуществлен $m \cdot n$ способами.

Правило произведения можно распространить на выбор любого конечного числа элементов.

Пример. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 2, 4, 5, если цифры в числе не повторяются?

На месте сотен поставим любую из трех цифр. Это можно сделать тремя способами. После каждого такого выбора на месте десятков можно поставить любую из двух оставшихся цифр (т.е. двумя способами), так как цифры в числе не повторяются. Наконец, на месте единиц можно поставить оставшуюся одну цифру (т.е. одним способом). Применяя правило произведения два раза получим: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ способов, и соответственно, шесть трехзначных чисел.

Графической иллюстрацией правила произведения является специальная схема, условно называемая «дерево». Для рассмотренного примера соответствующая схема будет выглядеть так:

Рассмотрим пример на применение этих двух правил.

Пример. Сколько различных «слов» (т.е. последовательностей букв), состоящих не менее чем из пяти различных букв, можно образовать из букв слова «рисунок»?

Слово «рисунок» состоит из семи различных букв. Применяя правило произведения соответствующее число раз, можно подсчитать, что существует: $N_1 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520$ «слов» из пяти букв (выбираемых из букв слова «рисунок»), $N_2 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 5040$ «слов» из шести букв, $N_3 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$ «слов» из семи букв. Тогда по правилу суммы, существует $N = N_1 + N_2 + N_3 = 2520 + 5040 + 5040 = 12\,600$ «слов», состоящих не менее чем из пяти букв слова «рисунок».

3.2 Виды комбинаций

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Обозначим символом: $n!$ (читается «эн факториал») – число, равное произведению всех натуральных чисел от 1 до n. Например:

$1! = 1;$

$2! = 1 \cdot 2 = 2;$

$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6;$

$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24;$

$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120;$

... .

Положим по определению[11]: $0! = 1$.

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

[11] Это определение связано с желанием распространить основное свойство факториала $n! = (n - 1)! \cdot n$ на целые числа $n \geq 1$: $1 = 1! = (1 - 1)! \cdot 1 = 0! \cdot 1 \Rightarrow 0! = 1$.

Рассмотрим некоторое множество, состоящее из n различных элементов. Если в множестве введено отношение порядка, т.е. определено какой элемент множества за каким следует или какому предшествует, то множество называется *упорядоченным*.

Пример. Пусть даны три буквы: A, B, C. Составим все возможные упорядоченные множества из этих букв:

$$ABC \quad BCA \quad CBA \quad ACB \quad BAC \quad CAB.$$

Этих множеств получилось 6 штук и они отличаются только порядком расположения букв.

Определение. Упорядоченные множества из n элементов называются *перестановками из n элементов*.

Таким образом, перестановки из n элементов отличаются только порядком следования элементов. Число перестановок из n элементов обозначается: P_n. В предыдущем примере мы выяснили, что $P_3 = 6$

Пример. Пусть даны те же буквы: A, B, C. Составим упорядоченные подмножества, состоящие из двух букв:

$$\begin{matrix} AB & AC & BC \\ BA & CA & CB. \end{matrix}$$

Все полученные подмножества отличаются или буквами, или порядком букв (т.е. AB и BA считаются разными подмножествами). Этих подмножеств 6 штук.

Определение. Упорядоченные подмножества из n элементов по k элементов каждое, называются *размещениями из n элементов по k элементов* (или кратко: *размещениями из n по k*).

Таким образом, размещения отличаются либо составом элементов, либо их порядком. Число размещений из n по k обозначается: A_n^k. В предыдущем примере мы выяснили, что $A_3^2 = 6$.

Пример. Пусть даны три буквы: A, B, C. Составим подмножества из двух элементов:

$$\begin{matrix} AB \quad AC \\ BC. \end{matrix}$$

Изменение порядка букв внутри этих подмножеств не приводит к новому подмножеству. Этих подмножеств получилось 3 штуки.

Определение. Подмножества из n элементов по k элементов каждое, отличающиеся хотя бы одним элементом, называются *сочетаниями из n элементов по k элементов* (или кратко: *сочетания из n по k*).

Таким образом, сочетания отличаются только составом элементов. Число сочетаний из n по k обозначается: C_n^k. В предыдущем примере мы выяснили, что: $C_3^2 = 3$.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Теорема. *Число размещений из n элементов по k элементов подсчитывается по формуле*: $A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$.

Доказательство. Подсчитаем число размещений из n по k.

1 Пусть $k = 1$. Выбрать один элемент из n можно, очевидно, n способами. Поэтому $A_n^1 = 1$, что совпадает с доказываемой формулой.

2 Пусть $k = 2$. Здесь необходимо вспомнить правило произведения. Любой первый элемент из множества n элементов можно выбрать n способами, любой второй элемент из оставшихся $n - 1$ элементов можно выбрать $n - 1$ способом. Тогда по правилу произведения любые первые два элемента можно выбрать $n\ (n - 1)$ способами т.е. $A_n^2 = n\ (n-1)$, что тоже совпадает с доказываемой формулой.

Рассуждая аналогично, получим, что

$$A_n^3 = n(n-1)(n-2)\ ; \quad A_n^4 = n(n-1)(n-2)(n-3)\ ; \quad \ldots$$

Окончательно получим: $A_n^k = n(n-1)(n-2)\ \ldots\ (n-k+1)$.

Теорема доказана.

Следствие. $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Доказательство. После очевидных преобразований получим:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\ \dots\ (n-k+1) = \\ = \frac{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-k)\cdot(n-k+1)\cdot\ldots\cdot(n-2)\cdot(n-1)\cdot n}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-k)} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Следствие доказано.

Теорема. *Число перестановок из n элементов подсчитывается по формуле:* $P_n = n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n$.

Доказательство. Перестановки являются частным случаем размещений, а именно, перестановка из n элементов – это размещение из n элементов по n элементов. Поэтому:

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n.$$

Теорема доказана.

Теорема. *Число сочетаний из n элементов по k элементов подсчитывается по формуле*: $C_n^k = \dfrac{A_n^k}{P_k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Доказательство. Подсчитаем число всех сочетаний из n по k следующим образом. Сначала образуем все возможные неупорядоченные подмножества, содержащие k элементов. Их число равно: C_n^k. Затем из каждого полученного подмножества перестановкой его элементов получим все упорядоченные подмножества из k элементов, которых будет в $k!$ раз больше, так как каждое k-элементное множество можно упорядочить $k!$ способами. Следовательно: $A_n^k = k!C_n^k$. Теорема доказана.

КОМБИНАТОРНЫЕ ЗАДАЧИ

Задача. Максимально возможное количество матчей, которое можно организовать в высшей лиге футбольного дивизиона страны не должно превышать 160 в один круг. Сколько (максимально) команд можно включить в состав высшей лиги.

Решение. Обозначим возможное количество команд через n, тогда число сыгранных матчей равно C_n^2, по условию $C_n^2 \le 160$. Пусть $C_n^2 = 160$, тогда:

$$\frac{n!}{2!(n-2)!} = 160;$$

$$\frac{n(n-1)}{2} = 160;$$

$$n^2 - n - 320 = 0;$$

$$n_1 = \frac{1-\sqrt{1+1280}}{2} \approx -17{,}4; \qquad n_2 = \frac{1+\sqrt{1+1280}}{2} \approx 18{,}4.$$

Число команд должно быть натуральным числом, поэтому $n = 18$.

Ответ. 18 команд.

Задача. Сколькими способами можно упорядочить множество $\{1, 2, \dots, 2n\}$ так, чтобы каждое четное число имело четный номер?

Решение. Четные числа (их n штук) можно расставить на местах с четными номерами (таких мест n штук) $n!$ способами. Каждому способу расположения четных чисел на местах с четными номерами соответствует $n!$ способов расположения нечетных чисел на местах с нечетными номерами. Поэтому, по правилу умножения общее число перестановок указанного типа равно: $n! \cdot n! = (n!)^2$.

Ответ. $(n!)^2$.

Задача. Имеется 4 сорта чая, 5 сортов конфет и 6 сортов печенья. Сколькими способами можно организовать чаепитие-дегустацию на трех человек, если каждый может выпить одну чашку чая определенного сорта с одной конфетой и одним печеньем?

Решение. Используя правило произведения, подсчитаем, что:

1) число способов распределить сорта чая для трех дегустаторов равно 4^3;
2) число способов распределить по одной конфете определенного сорта для трех дегустаторов равно 5^3;
3) число способов распределить по одному печенью определенного для трех дегустаторов равно 6^3.

Применяя еще раз правило произведения, мы получим, что число способов организовать данное чаепитие-дегустацию равно

$$4^3 \cdot 5^3 \cdot 6^3 = 1\ 728\ 000.$$

Ответ. 1 728 000.

КОМБИНАЦИИ С ПОВТОРЕНИЯМИ

При решении комбинаторных задач часто приходится сталкиваться с комбинациями, в которых один и тот же элемент участвует более одного раза − такие комбинации называются *комбинациями с повторениями*. Рассмотрим комбинации с повторениями более подробно.

Рассмотрим сначала ***задачу***. Сколько различных трехзначных чисел можно записать при помощи цифр 4 и 5?

Решение. Возможны четыре случая.

1. В трехзначное число цифра 4 не входит, т.е. 555.
2. В трехзначное число цифра 4 входит один раз, т.е. 455, 545, 554.
3. В трехзначное число цифра 4 входит два раза, т.е. 445, 454, 544.
4. В трехзначное число цифра 4 входит три раза, т.е. 444.

Таким образом, различных трехзначных чисел из цифр 4, 5 можно составить 1 + 3 + 3 + 1 = 8 штук. Эти числа отличаются или составом цифр, или их порядком, что соответствует комбинациям под названием *размещения*. Но это не совсем обычные размещения, они допускают повторение элементов.

Определение. *Размещением с повторениями из m элементов по k элементов* называется такое упорядоченное множество, которое содержит k элементов, причем один и тот же элемент может входить в это множество несколько раз (от нуля до k).

Пример. Составим из трех элементов A, B, C размещения с повторениями из 3-х элементов по 2 элемента (или короче: размещение с повторениями из 3-х по 2):

$$\begin{matrix} AA & BB & CC \\ AC & BA & CB \\ AB & BC & CA. \end{matrix}$$

Заметим, что размещения с повторениями одинаковы, если они совпадают как элементами, так и порядком их расположения.

Число всех размещений с повторениями из m по k обозначается символом $\overline{A}_m^k$ (обратите внимание на отличие от обозначения числа размещений из n по k − у данного обозначения сверху расположена черта).

Теорема. *Число всех размещений с повторениями из m по k равно* m^k, *т.е.* $\overline{A}_m^k = m^k$.

Доказательство. В размещении с повторениями из m по k есть k «мест» и на каждом «месте» может быть один из m элементов. Следовательно, по правилу произведения, число всех размещений с повторениями из m по k равно m^k.

Теорема доказана.

Задача. Сколько различных пятизначных чисел можно составить при помощи цифр 1, 2, 3?

Решение. Согласно предыдущему, искомое число равно $\overline{A}_3^5 = 3^5 = 243$.

Рассмотрим еще одну ***задачу***. Сколько различных расписаний экзаменов может быть составлено, если в экзаменационную сессию сдается 4 экзамена двум преподавателям (каждому по 2 экзамена).

Решение. Обозначим первого преподавателя p, а второго − v. Тогда возможны ситуации pvpv vpvp

$$pvvp \qquad vppv$$
$$ppvv \qquad vvpp.$$

Других ситуаций не получится, так как записать две «p» на 2-х из 4-х мест можно C_4^2 способами, а две «v» на оставшиеся два места можно определить C_2^2 способами. По правилу произведения получим, что количество различных расписаний может быть: $C_4^2 \cdot C_2^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} \cdot \frac{(4-2)!}{2!\,0!} = \frac{4!}{2!\,2!} = 6$ штук.

В этой задаче мы встретились с перестановками с повторениями.

Определение. *Перестановка n элементов, среди которых k_1 элемент первого типа, k_2 элементов второго типа, ..., k_m элементов m-го типа* ($k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$), причем элементы разных типов различны, называется перестановкой с повторениями n элементов, среди которых k_1 элементов первого типа, k_2 элементов второго типа, …, k_m элементов m-го типа (или короче: перестановкой с повторениями, если заранее известно, что есть n, $k_1,\ldots, k_m$).

Число всех вышеупомянутых перестановок с повторениями обозначается $P(k_1, \ldots, k_m)$. В предыдущей задаче мы показали, что $P(2, 2) = 6$.

Теорема. *Число всех перестановок с повторениями n элементов, среди которых k_1 элементов первого типа, ..., k_m элементов m-го типа* ($k_1 + \ldots + k_m = n$) *вычисляется по формуле*:

$$P(k_1, \ldots, k_m) = \frac{n!}{k_1!\ldots k_m!} = \frac{(k_1 + \ldots + k_m)!}{k_1!\ldots k_m!}.$$

Доказательство. В каждой перестановке с повторениями n «мест», из них k_1 «мест» занимают элементы первого типа, …, k_m «мест» занимают элементы m-го типа. Элементы первого типа можно расположить $C_n^{k_1}$ способами, элементы второго типа – $C_{n-k_1}^{k_2}$ способами, …, элементы m-го типа – $C_{n-k_1-\ldots-k_{m-1}}^{k_m}$ способами. По правилу произведения, число всех рассматриваемых перестановок с повторениями будет равно:

$$P(k_1,\ldots,k_m) = C_n^{k_1} \cdot C_{n-k_1}^{k_2} \cdot \ldots \cdot C_{n-k_1-\ldots-k_{m-1}}^{k_m} =$$
$$= \frac{n!}{k_1!(n-k_1)!} \cdot \frac{(n-k_1)!}{k_2!(n-k_1-k_2)!} \cdot \ldots \cdot \frac{(n-k_1-\ldots-k_{m-1})!}{k_m!(n-k_1-\ldots-k_{m-1}-k_m)!} = \frac{n!}{k_1! k_2! \ldots \cdot k_m!}.$$

Теорема доказана.

Задача. Сколько различных последовательностей букв можно составить, переставляя буквы в слове «криминалистика».

Решение. Так как в слове «криминалистика» 14 букв, то $n = 14$. Элементов первого типа (буквы «к») 2 штуки ($k_1 = 2$). Далее: $k_2 = 1$ (буква «р»), $k_3 = 4$ (буква «и»), $k_4 = 1$ (буква «м»), $k_5 = 1$ (буква «н»), $k_6 = 2$ (буква «а»), $k_7 = 1$ (буква «л»), $k_8 = 1$ (буква «с»), $k_9 = 1$ (буква «т»). Следовательно, количество всех слов:

$$P(2, 1, 4, 1, 1, 2, 1, 1, 1) = \frac{14!}{2!\,4!\,2!}.$$

Рассмотрим следующую ***задачу***. Трехсменное дежурство на КПП обеспечивают два подразделения. Сколько различных расписаний дежурства можно составить?

Решение. Обозначим факт дежурства представителя первого подразделения через p, второго – через v. Тогда возможны расписания: ppp, ppv, $p$vv, vvv. Каждая из четырех комбинаций отличается от любой другой составом элементов, порядок здесь не существенен, так как основное – сколько людей выделяет подразделение на дежурство. Следовательно, эти комбинации – сочетания, но не обычные, а с повторениями.

Определение. *Сочетанием с повторениями из m элементов по k элементов* (или короче: *сочетанием с повторениями из m по k*) называется множество, содержащее k элементов, причем каждый элемент принадлежит к одному из m типов.

Число всех вышеупомянутых сочетаний с повторениями из m по k обозначается $\overline{C}_m^k$ (обратите внимание на отличие от обозначения числа сочетаний из n по k – черта сверху).

Пример. Напишем все сочетания с повторениями из трех элементов A, B, C по 3. Сколько их?

Вот они: *AAA* *BBB* *CCC*
ABB *BCC*
ACC *BBC*
AAB
AAC
ACB

Их 10 штук, т.е. $\overline{C}_3^3 = 10$.

Теорема. *Число сочетаний с повторениями из m по k равно*:

$$\overline{C}_m^k = P(k, m-1) = \frac{(k+m-1)!}{k!(m-1)!}.$$

Доказательство. Каждое сочетание с повторениями полностью определяется, если указать, сколько элементов каждого из m типов в него входит. Поставим в соответствие каждому сочетанию с повторениями последовательность нулей и единиц, составленную по такому правилу: напишем подряд столько единиц, сколько элементов первого типа входит в сочетание с повторениями, далее поставим нуль, и после него напишем столько единиц, сколько элементов второго типа содержит это сочетание и т.д.

Таким образом, каждому сочетанию с повторениями из m по k соответствует последовательность из k единиц и $m - 1$ нулей, и наоборот, по каждой такой последовательности однозначно восстанавливается сочетание с повторениями из m по k. Поэтому число сочетаний с повторениями из m по k равно числу перестановок с повторениями k единиц и $m - 1$ нулей, т.е.

$$\overline{C}_m^k = P(k, m-1) = \frac{(k+m-1)!}{k!(m-1)!}.$$

Теорема доказана.

Следствие. $\overline{C}_m^k = C_{m+k-1}^{m-1} = C_{m+k-1}^k$.

Доказательство. В силу формулы $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, доказательство очевидно. Следствие доказано.

Пример. Сколько можно сделать костей домино, используя числа 0, 1, 2, …, 9 (а не 0, 1, 2, …, 6 как обычно).

Решение. Кости «нового» домино можно рассматривать как сочетания с повторениями из 10 по 2. Следовательно, число костей такого домино было бы:

$$\overline{C}_{10}^2 = C_{10+1}^{10-1} = C_{11}^9 = \frac{11!}{9!\,2!} = 5 \cdot 11 = 55.$$

3.6 Задачи по теме «Элементы комбинаторики»

Вычислить:

1 а) $\dfrac{6!-5!}{5!}$; б) $\dfrac{6!}{7!+8!}$.

2 а) $\dfrac{20!}{5!\,16!}$; б) $\dfrac{21!+20!}{19!+18!}$.

3 а) $\dfrac{P_6(C_7^5+C_7^4)}{A_{10}^7}$; б) $\dfrac{A_{n+3}^{n-1}}{P_n C_{n+3}^2}$.

Найти n, если:

4 а) $12C_{n+3}^{n-1} = 55A_{n+1}^{2}$; б) $\frac{1}{C_4^n} = \frac{1}{C_5^n} + \frac{1}{C_6^n}$.

Решите неравенства:

5 а) $C_{10}^{x-1} < 2C_{10}^{x}$; б) $C_{105}^{x} < 3C_{105}^{x+1}$.

Найдите область определения функции и множество ее значений:

6 а) $f(x) = A_{7-x}^{x-3}$; б) $f(x) = C_{x+1}^{2x-8}$.

ПРАВИЛО ПРОИЗВЕДЕНИЯ И ПРАВИЛО СУММЫ

7 Сколько различных полных обедов можно составить, если в меню имеется 3 первых, 4 вторых и 3 третьих блюда?

8 Сколько различных трехбуквенных перестановок можно составить из букв слова *ромб*?

9 В отряде 5 разведчиков, 4 связиста и 2 санитара. Сколькими способами можно составить разведгруппу из трех человек, чтобы в нее вошли разведчик, связист и санитар?

10 Сколько двузначных или трехзначных чисел можно составить из нечетных цифр при условии, что ни одна цифра не повторяется?

11 Из цифр 0, 1, 2, 3 составлены все возможные четырехзначные числа так, что в каждом числе нет одинаковых цифр. Сколько получилось чисел?

12 Сколько существует различных положений, в которых могут оказаться четыре переключателя, если каждый из них может быть включен или выключен?

13 Сколько различных натуральных делителей имеет число $2^7 \cdot 3^{10} \cdot 7^{15} \cdot 11^9$?

ПЕРЕСТАНОВКИ БЕЗ ПОВТОРЕНИЙ

14 Написать все перестановки из трех элементов α, β, γ.

15 Курьеру поручено разнести пакеты в 6 различных учреждений. Сколько различных маршрутов он может выбрать?

16 Сколько различных трехзначных чисел (без повторения цифр в числе) можно составить из следующих цифр 3, 5, 7?

17 Сколько перестановок можно сделать из букв слова «вершина» так, чтобы:

а) «ш» стояло посередине;

б) чтобы перестановка начиналась с «ш»;

в) чтобы начиналась на «в» и кончалась на «на»?

18 Сколько можно составить перестановок из букв *ABCabc*, начинающихся с прописной буквы?

19 За одним круглым столом надо рассадить 5 юношей и пять девушек так, чтобы не было двух рядом сидящих юношей и двух рядом сидящих девушек. Сколькими способами это можно сделать?

20 Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 составляются пятизначные числа, не кратные 5 и не содержащие одинаковых цифр. Сколько существует таких чисел?

21 Сколько можно составить перестановок из n элементов, в которых данные два элемента a и b не стоят рядом? Данные три элемента a, b, c не стоят рядом (в любом порядке)?

22 Сколькими способами можно разложить на шахматной доске 8 ладей так, чтобы они не могли «бить» друг друга?

23 Сколькими способами можно рассадить в ряд 12 человек на 12 стульях?

24 Сколькими способами можно рассадить 12 человек за круглым столом на 12 стульях, причем расположения сидящих считаются одинаковыми, если: а) у каждого из сидящих за столом один и тот же сосед справа и один и тот же сосед слева; б) каждый из сидящих за столом имеет одних и тех же соседей; в) каждый из сидящих за столом имеет одного и того же диаметрально противоположного соседа?

25 Семь девушек водят хоровод. Сколькими различными способами они смогут встать в круг?

26 Сколько различных ожерелий можно составить из шести различных бусинок?

27 Сколькими способами можно упорядочить множество $\{1, 2, 3, ..., n\}$ так, чтобы числа 1, 2, 3 стояли рядом и в порядке возрастания?

28 Сколько существует перестановок из n элементов, в которых между двумя данными элементами стоят какие-то r элементов из оставшихся $n - 2$ элементов?

РАЗМЕЩЕНИЯ БЕЗ ПОВТОРЕНИЙ

29 Написать все размещения из трех элементов α, β, γ по два.

30 На 5 человек, подавших заявления на выделение путевок, выделено всего 3 и по разным маршрутам. Сколькими способами можно распределить путевки между желающими?

31 В городе 5 почтовых отделений, на входе в каждое имеется почтовый ящик. Гражданин N написал три жалобы на действия одного и того же должностного лица. Желая создать впечатление, что это жалобы различных респондентов, он спланировал разместить их по различным почтовым ящикам. Сколькими способами он сможет это сделать?

32 Из точки проведено n лучей. Сколько при этом получилось углов, меньших 360°?

33 Сколько словарей надо издать, чтобы можно было непосредственно выполнять переводы с любого из 5 языков: русского, английского, французского, немецкого, итальянского на любой другой из этих 5 языков?

34 В группе 10 юношей и 10 девушек, которые все умеют петь, танцевать и выполнять гимнастические упражнения. Для участия в концерте нужно выделить танцующий дуэт, дуэт певцов и гимнастический дуэт (каждый из которых состоит из юноши и девушки). Сколькими способами это можно сделать?

35 Сколькими способами могут быть присуждены три премии: 1-я, 2-я и 3-я трем лицам, если число соревнующихся равно десяти?

36 Сколькими способами можно составить трехцветный флаг (три горизонтальные цветные полосы равной ширины), если имеется материал 5 разных цветов? Та же задача, если одна из полос должна быть красной (красный – один из имеющихся цветов)?

37 Сколькими способами можно выбрать из полной колоды карт (содержащей 54 карты) по одной карте каждой масти? То же самое при условии, что среди вынутых карт нет ни одной пары одинаковых, то есть двух королей, двух десяток и т.д.?

38 Руководитель фирмы сформулировал 5 различных поручений, которые он дает своим 8 подчиненным так, что каждый получает либо одно поручение, либо не получает поручения. Сколькими способами это можно это сделать?

39 Сколькими способами можно переставить буквы слова: а) «преступление»; б) «параллелизм» так, чтобы не поменялся порядок гласных букв?

40 В соревновании по гимнастике участвуют 10 человек. Трое судей должны независимо друг от друга перенумеровать их в порядке, отражающем их успехи в соревновании по мнению судей. Победителем считается тот, кого назовут первым хотя бы двое судей. В какой доле случаев победитель соревнования будет определен?

СОЧЕТАНИЯ БЕЗ ПОВТОРЕНИЙ

41 Написать все сочетания из трех элементов α, β, γ по два.

42 В профкоме имеются 3 различные туристические путевки. Сколькими способами их можно распределить среди 5 желающих сотрудников, если каждый из сотрудников может получить не более одной путевки?

43 В подразделении 60 солдат и 5 офицеров. Сколькими способами можно выделить караул, состоящий из трех солдат и одного офицера?

44 Сколькими способами из 35 учеников класса можно выбрать трех дежурных по школе и одного по столовой?

45 На одной из параллельных прямых лежат 15 точек, на второй – 21. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

46 Сколькими способами группу из 15 студентов можно разбить:

а) на две группы в 6 и 9 человек;

б) на три группы в 3, 7 и 5 человек?

47 На плоскости даны 15 точек. Никакие три из них не лежат на одной прямой:

а) сколько различных прямых определяют эти точки;

б) сколько окружностей определяют эти точки, если никакие четыре не лежат на одной окружности?

48 Трое юношей и семь девушек отправляются на двух лодках по реке. Сколькими способами их можно разместить в лодках поровну, чтобы в каждой был хотя бы один юноша?

49 В классе 30 учеников. Ежедневно для дежурства выделяются два ученика. Можно ли составить расписание дежурства так, чтобы никакие два ученика не дежурили вместе дважды в течение учебного года?

50 Сколько произведений по три множителя в каждом, кратных 3, можно составить из цифр 1, 2, 3, 5, 7, 9 (каждая цифра используются только один раз)?

51 Имеются p белых и q черных шаров. Сколькими способами можно выложить в ряд все шары так, чтобы никакие 2 черных шара не лежали рядом?

52 Сколько имеется четырехзначных чисел, у которых:

а) каждая следующая цифра больше предыдущей;

б) каждая следующая цифра меньше предыдущей?

РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ

53 Даны элементы α, β, γ. Написать все

а) перестановки с повторениями 5 элементов, среди которых 1 элемент α, 2 элемента β, 2 элемента γ;

б) сочетания с повторениями из этих трех элементов по три;

в) размещения с повторениями из этих трех элементов по два.

54 Сколько букв алфавита можно закодировать пятью сигналами, если три сигнала – импульсы тока, а два – паузы?

55 Сколькими способами можно расставить на книжной полке библиотеки 5 книг по теории вероятностей, 3 книги по теории игр и 2 книги по математической логике, если книги по каждому предмету одинаковые?

56 Найдите число различных перестановок в слове *статистика*; в слове *парабола*.

57 У мамы 2 яблока, 3 груши и 4 апельсина. Каждый день в течение девяти дней она выдает сыну по одному плоду. Сколькими способами это может быть сделано?

58 В почтовом отделении продаются открытки десяти видов. Сколькими способами можно купить здесь набор из восьми открыток, если открыток каждого вида имеется не менее восьми штук?

59 Сколько можно построить различных прямоугольных параллелепипедов, если длина каждого его ребра может выражаться любым целым числом от 1 до 10?

60 Трое юношей и две девушки выбирают место работы. Сколькими способами они могут это сделать, если в городе есть три завода, где требуются рабочие в литейные цехи (туда берут лишь мужчин), две ткацкие фабрики (туда приглашают женщин) и две фабрики, где требуются мужчины и женщины?

61 Для премий на математической олимпиаде выделено 3 экземпляра одной книги, 2 экземпляра другой и 1 экземпляр третьей книги. Сколькими способами могут быть вручены премии, если в олимпиаде участвовало 20 человек (каждому из участников вручается только одна книга)?

62 Сколько чисел, меньших чем миллион, можно написать с помощью цифр 8 и 9?

63 Обычные автомобильные номера состоят из трех букв и трех цифр. Найдите число таких номеров, для номеров используются 24 буквы русского алфавита (имеющие одинаковое написание с латинскими буквами) и цифры (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9). Комбинация из трех нулей не используется.

64 Сколькими способами можно переставить буквы слова *перешеек* так, чтобы 4 буквы «е» не стояли подряд?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Виленкин Н.Я. Комбинаторика. М.: Наука, 1969.

2 Виленкин Н.Я., Потапов В.Г. Задачник-практикум по теории вероятностей с элементами комбинаторики и математической статистики. М.: Просвещение, 1979.

3 Виленкин Н.Я. Рассказы о множествах. М.: Просвещение, 1969.

4 Ежов И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И. Элементы комбинаторики. М.: Наука, 1977.