

Федеральное агентство по образованию
ГОУВПО «Уральский государственный технический университет – УПИ»

А.Б. Соболев, А.Ф. Рыбалко

МАТЕМАТИКА

Часть 3

Рекомендовано Уральским отделением Учебно-методического объединения вузов РФ по образованию в области строительства в качестве учебного пособия для студентов всех форм обучения специальностей направления 6533500 – Строительство

Научный редактор доц., канд. физ.–мат. наук С.И. Тарлинский

Екатеринбург
2005

ББК 22.1я73
УДК 51(075.8)
С54

Рецензенты:

кафедра физики Уральского государственного лесотехнического университета (зав. кафедрой физики УГЛУ, д-р физ.-мат. наук, проф. М.П. Кащенко); д-р физ.-мат. наук, проф. А.П. Танкеев, Институт физики металлов УрО РАН.

С 54 **А.Б. Соболев, А.Ф. Рыбалко** Математика: учебное пособие / А.Б. Соболев, А.Ф. Рыбалко. – Екатеринбург: ГОУ ВПО УГТУ-УПИ, 2005. – 142 с.

ISBN 5–321–00769–1

Курс лекций по дисциплине ЕН.Ф.01 «Математика» предназначен для студентов строительных специальностей технических вузов, изучающих данную дисциплину в объеме 540–800 часов в течение 4 семестров. Содержание лекций соответствует ГОС и рабочим программам технических специальностей.

Третья часть включает 16 лекций и содержит материал, обычно изучаемый в третьем семестре: кратные и криволинейные интегралы, элементы теории поля, числовые и функциональные ряды, ряды и интеграл Фурье.

Электронная версия книги, используемая в аудиториях, сопровождается дополнительным иллюстративным материалом.

Наряду с курсом лекций существуют пособия, рассматривающие решение типичных задач и способствующие усвоению понятий и методов.

ББК 51 (075.8)
УДК 22.1я 73

ISBN 5–321–00769–1

© ГОУ ВПО «Уральский государственный технический университет – УПИ», 2005

ПРЕДИСЛОВИЕ

Курс лекций предназначен для студентов строительных специальностей технических вузов и состоит из четырех частей, в которых излагается теоретический материал курса математики для инженеров.

В третьей части излагаются следующие разделы: кратные и криволинейные интегралы, элементы теории поля, числовые и функциональные ряды, ряды и интеграл Фурье.

В начале каждой лекции приведены заголовки разделов. В совокупности эти заголовки образуют программу дисциплины и являются базой вопросов для тестовых и экзаменационных заданий. Звездочкой помечены разделы, предназначенные для более глубокого изучения. В конце каждой лекции приведен список ключевых понятий.

В лекциях студент найдет основные определения, формулировки теорем, примеры, демонстрирующие методы решения типичных задач. Если отсутствуют доказательства каких-либо утверждений, то формулировки результатов сопровождаются примерами, разъясняющими их смысл.

В тексте приняты следующие условные обозначения:

О	-	определение
Т	-	теорема
С	-	следствие
!	-	замечание

СОДЕРЖАНИЕ

ЧАСТЬ 3

ЛЕКЦИИ 1–4

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ..... 8

- 1.1. Интегралы по фигуре. Основные определения
- 1.2. Задача об отыскании массы тела
- 1.3. Определение интеграла по фигуре
- 1.4. Классификация интегралов по фигуре
- 1.5. Свойства интегралов по фигуре, определяемые равенствами
- 1.6. Свойства интегралов по фигуре, определяемые неравенствами (оценка интегралов по фигуре)
- 2.1. Двойной интеграл. Геометрический смысл двойного интеграла
- 2.2. Вычисление двойного интеграла
- 2.3. Замена переменных в двойном интеграле
- 2.4. Двойной интеграл в полярных координатах
 - 2.4.1. Дифференциальный элемент площади в полярной системе координат
- 2.5. Поверхностный интеграл первого типа (рода)
 - 2.5.1. Вычисление поверхностных интегралов первого рода
- 3.1. Тройной интеграл
 - 3.1.1. Задача о вычислении массы тела
- 3.2. Замена переменных в тройном интеграле
- 3.3. Тройной интеграл в цилиндрических координатах
 - 3.3.1. Элемент объема в цилиндрических координатах
- 3.4. Тройной интеграл в сферических координатах
 - 3.4.1. Элемент объема в сферических координатах
- 4.1. Криволинейные интегралы первого типа (рода). Способы вычисления
 - 4.1.1. Криволинейный интеграл первого типа по плоской кривой
 - 4.1.2. Криволинейный интеграл первого типа по пространственной кривой
 - 4.1.3. Геометрический смысл линейного интеграла по плоской кривой
- 4.2. Механические приложения интегралов по фигуре
 - 4.2.1. Длина, площадь, объем фигуры
 - 4.2.2. Масса фигуры
 - 4.2.3. Момент инерции фигуры
 - 4.2.4. Статические моменты фигуры. Центр тяжести фигуры

Лекции 5–9

ТЕОРИЯ ПОЛЯ (ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ)..... 40

- 5.1. Скалярное поле
- 5.2. Поверхности и линии уровня
- 5.3. Производная по направлению
- 5.4. Градиент скалярного поля
 - 5.4.1. Оператор Гамильтона (набла)
 - 5.4.2. Связь производной по направлению с градиентом
 - 5.4.3. Свойства градиента
- 5.5. Векторное поле
 - 5.5.1. Векторные линии
 - 5.5.2. Плоское векторное поле
- 6.1. Односторонние и двусторонние поверхности
- 6.2. Площадь поверхности
- 6.3. Система координат и ориентация поверхности
- 6.4. Поверхностный интеграл 1-го рода
- 6.5. Поверхностный интеграл 2-го рода
- 7.1. Поток векторного поля
- 7.2. Свойства потока
- 7.3. Вычисление потока
 - 7.3.1. Проектирование на одну координатную плоскость
 - 7.3.2. Проектирование на три координатные плоскости
- 7.4. Физический смысл потока
- 7.5. Дивергенция векторного поля
 - 7.5.1. Свойства дивергенции
- 7.6. Физический смысл потока через замкнутую поверхность
- 7.7. Теорема Остроградского – Гаусса
- 7.8. Инвариантное определение дивергенции
 - 7.8.1. Физический смысл дивергенции
- 8.1. Линейный интеграл в векторном поле
- 8.2. Свойства линейного интеграла
- 8.3. Вычисление линейного интеграла
- 8.4. Физический смысл линейного интеграла
- 8.5. Ротор (вихрь) векторного поля
 - 8.5.1. Свойства ротора (вихря)
- 8.6. Теорема Стокса
- 8.7. Инвариантное определение ротора
- 8.9. Физический смысл ротора
- 8.10. Формула Грина
- 9.1. Потенциальное векторное поле
 - 9.1.1. Условия потенциальности поля
 - 9.1.2. Вычисление потенциала поля

- 9.2. Соленоидальное поле
 - 9.2.1. Свойства соленоидального поля
- 9.3. Операторы Гамильтона и Лапласа
 - 9.3.1. Оператор Гамильтона (набла)
 - 9.3.2. Оператор Лапласа

Лекции 10 - 11

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ..... 84

- 10.1. Числовые ряды. Общие положения
- 10.2. Ряды с положительными членами
- 10.3. Теоремы сравнения рядов с положительными числами
- 11.1. Достаточные признаки сходимости числовых рядов с положительными членами
 - 11.1.1. Признак Даламбера
 - 11.1.2. Признак Коши
 - 11.1.3. Интегральный признак сходимости
- 11.2. Знакопеременные ряды
- 11.3. Знакопеременяющиеся ряды. Признак Лейбница

Лекции 12 - 14

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ..... 98

- 12.1. Функциональные ряды. Основные определения
- 12.2. Равномерная сходимость
- 12.3. Признак Вейерштрасса
- 13.1. Степенные ряды. Основные определения
- 13.2. Вычисление радиуса сходимости
- 13.3. Свойства степенных рядов
- 13.4. Разложение функций в степенные ряды Тейлора и Маклорена
- 13.5. Разложение элементарных функций в ряды Маклорена
- 13.6. Применение степенных рядов
 - 13.6.1. Вычисление значений функций
 - 13.6.2. Вычисление интегралов, не берущихся в элементарных функциях
 - 13.6.3. Решение дифференциальных уравнений
- 14.1. Ряды в комплексной области. Числовые ряды
- 14.2. Степенные ряды в комплексной области

Лекции 15 - 16**РЯДЫ ФУРЬЕ..... 121**

- 15.1. Гармонический анализ. Ряды Фурье
- 15.2. Ортогональные системы функций
- 15.3. Тригонометрические ряды
- 15.4. Коэффициенты Фурье и ряд Фурье
для периодической функции с периодом 2π
- 15.5. Разложение функций в тригонометрические ряды
- 16.1. Разложение в ряд четных и нечетных функций с периодом 2π
- 16.2. Ряд Фурье для функции с произвольным периодом $T=2L$
- 16.3. Разложение в ряд Фурье непериодических функций
- 16.4. Комплексная форма ряда Фурье
- 16.5. Интеграл Фурье

БИБЛИОГРАФИЯ..... 140

Лекции 1 - 4

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

При изучении физики, механики и при решении разнообразных инженерных задач часто возникает необходимость наряду с интегралами от действительной функции одного переменного рассматривать интегралы от функций многих переменных. Таким образом, приходится вычислять интегралы по двумерным и трехмерным областям, по кривым и поверхностям, что приводит к необходимости знать кратные, криволинейные и поверхностные интегралы.

Изложение этих вопросов проводится в единой схеме, чем обусловлено введение понятия интеграла по фигуре.

- 1.1. Интегралы по фигуре. Основные определения
- 1.2. Задача об отыскании массы тела
- 1.3. Определение интеграла по фигуре
- 1.4. Классификация интегралов по фигуре
- 1.5. Свойства интегралов по фигуре, определяемые равенствами
- 1.6. Свойства интегралов по фигуре, определяемые неравенствами (оценка интегралов по фигуре)
 - 2.1. Двойной интеграл. Геометрический смысл двойного интеграла
 - 2.2. Вычисление двойного интеграла
 - 2.3. Замена переменных в двойном интеграле
 - 2.4. Двойной интеграл в полярных координатах.
 - 2.4.1. Дифференциальный элемент площади в полярной системе координат
 - 2.5. Поверхностный интеграл первого типа (рода)
 - 2.5.1. Вычисление поверхностных интегралов первого рода
- 3.1. Тройной интеграл
 - 3.1.1. Задача о вычислении массы тела
- 3.2. Замена переменных в тройном интеграле
- 3.3. Тройной интеграл в цилиндрических координатах
 - 3.3.1. Элемент объема в цилиндрических координатах
- 3.4. Тройной интеграл в сферических координатах
 - 3.4.1. Элемент объема в сферических координатах
- 4.1. Криволинейные интегралы первого типа (рода). Способы вычисления
 - 4.1.1. Криволинейный интеграл первого типа по плоской кривой
 - 4.1.2. Криволинейный интеграл первого типа по пространственной кривой
 - 4.1.3. Геометрический смысл линейного интеграла по плоской кривой
- 4.2. Механические приложения интегралов по фигуре
 - 4.2.1. Длина, площадь, объем фигуры
 - 4.2.2. Масса фигуры
 - 4.2.3. Момент инерции фигуры
 - 4.2.4. Статические моменты фигуры. Центр тяжести фигуры

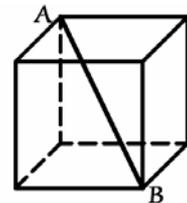
1.1. Интегралы по фигуре. Основные определения

- Под фигурой (множеством) Φ будем понимать:
 1. Отрезок $[a, b]$ оси OX .
 2. Плоскую область D плоскости XOY .
 3. Часть трехмерного пространства G .
 4. Плоскую или пространственную кривую L , задаваемую уравнениями:

$$f(P) = \begin{cases} f_1(x, y) \\ f_2(x, y, z) \end{cases}, \text{ где } P(x, y, z) \text{ – точка трехмерного пространства.}$$

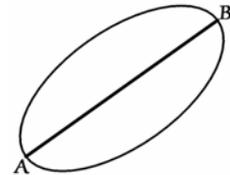
- 5. Поверхность Σ в пространстве.

- Диаметр d фигуры Φ называется максимальное расстояние между двумя точками фигуры. На рисунке $d = AB$.



- Под мерой μ будем понимать для фигур:

1. Длину отрезка $[a, b]$, $\mu = b - a$.
2. Площадь плоской области D , $\mu = S$.
3. Объем фигуры G , $\mu = V$.
4. Длину кривой L , $\mu = l$.
5. Площадь поверхности Σ , $\mu = S_{\text{поверх.}}$.



1.2. Задача об отыскании массы тела

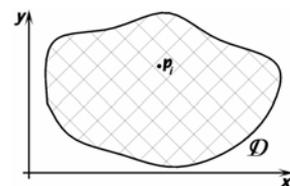
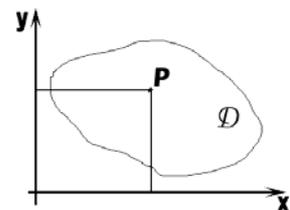
Предположим, что фигура Φ обладает массой, которая (масса) распределена с плотностью $\rho(P)$ в каждой точке $P(x, y, z) \in \Phi$.

Зададим плотность в виде:

$$\rho(P) = \begin{cases} \rho(x) & \text{– случай } \{1\} \\ \rho(x, y) & \text{– } \{2\} \\ \rho(x, y, z) & \text{– } \{3-5\} \end{cases}$$

Найдем массу фигуры в случае 2 (Φ - часть плоскости XOY): $\rho(P) = \rho(x, y)$

1. Рассмотрим случай однородного распределения плотности по фигуре, т.е. $\rho(P) = \text{const}$. Следовательно, $m = \rho(P) \cdot \mu$.



2. В случае, если $\rho(P) \neq const$, разобьем фигуру Φ произвольным образом на n элементарных областей Φ_i и выберем точку $P_i \in \Phi_i$. Пусть n достаточно велико, чтобы полагать в каждой элементарной фигуре $\rho(P_i) \approx const$. Обозначим $\Delta\mu_i$ - меру каждой элементарной фигуры Φ_i . Масса элементарной фигуры: $\Delta m_i \approx \rho(P_i)\Delta\mu_i$. Масса всей фигуры $m \approx \sum_{i=1}^n \rho(P_i)\Delta\mu_i$.

1.3. Определение интеграла по фигуре

Пусть дана фигура Φ и функция $f(P)$, $P \in \Phi$, определенная на множестве Φ . Разобьем фигуру Φ произвольным образом на n элементарных областей Φ_i и выберем точку $P_i \in \Phi_i$. Найдем диаметр каждой элементарной фигуры Φ_i и обозначим максимальную из величин d_i за $r_n = \max\{d_i\}$. Назовем r_n рангом разбиения. При $n \rightarrow \infty$ $r_n \rightarrow 0$. Найдем $f(P_i)$ и составим интегральную сумму вида:

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(P_i)\Delta\mu_i.$$

О Интегралом по фигуре Φ (обозначение $\int_{\Phi} f(P)d\mu$) будем называть предел интегральной суммы S_n при $r_n \rightarrow 0$, если этот предел существует и не зависит от способа дробления и выбора точек P_i . Таким образом,

$$\int_{\Phi} f(P)d\mu = \lim_{r_n \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(P_i)\Delta\mu_i, \quad \Phi - \text{область интегрирования.}$$

Г **Теорема существования интеграла по фигуре.** Если $f(P)$ непрерывна в любой точке P замкнутой области Φ , то интеграл по фигуре существует.

О Область Φ называется **замкнутой**, если она ограничена замкнутой линией, и точки, лежащие на границе, принадлежат области Φ .

1.4. Классификация интегралов по фигуре

1. Пусть фигура - часть прямой, $\Phi \leftrightarrow [a, b]$, $f(P) = f(x)$, $d\mu = dx$,

$$\int_{\Phi} f(P)d\mu = \int_a^b f(x)dx - \text{определенный интеграл на отрезке } [a, b].$$

2. Фигура – часть плоскости xOy , $\Phi \leftrightarrow D$, $f(P) = f(x, y)$, $d\mu = dS$,
 $\int_{\Phi} f(P) d\mu = \iint_D f(x, y) dS$ – двойной интеграл от функции $f(P) = f(x, y)$
 по области D .
3. Фигура – пространственная область, $\Phi \leftrightarrow G$, $f(P) = f(x, y, z)$,
 $d\mu = dV$, $\int_{\Phi} f(P) d\mu = \iiint_G f(x, y, z) dv$ – тройной интеграл от функции
 $f(P) = f(x, y, z)$ по области G .
4. Фигура – линия на плоскости или в пространстве, $\Phi \leftrightarrow L$,
 $f(P) = \begin{cases} f(x, y) \\ f(x, y, z) \end{cases}$, $d\mu = dl$, $\int_{\Phi} f(P) d\mu = \int_L f(x, y, z) dl$ – криволинейный
 интеграл от функции $f(P)$ по кривой L .
5. Фигура – поверхность, $\Phi \leftrightarrow \Sigma$, $f(P) = f(x, y, z)$, $d\mu = d\sigma$,
 $\int_{\Phi} f(P) d\mu = \iint_{\Sigma} f(x, y, z) d\sigma$ – поверхностный интеграл от функции
 $f(P) = f(x, y, z)$ по области Σ .

1.5. Свойства интегралов по фигуре, определяемые равенствами

Доказательства свойств следуют из определения интеграла по фигуре.

Пусть интеграл по фигуре существует, тогда:

1. $\int_{\Phi} cf(P) d\mu = c \int_{\Phi} f(P) d\mu$, $c = const$.

Доказательство:

$$\int_{\Phi} cf(P) d\mu = \lim_{r_n \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n cf(P_i) \Delta\mu_i = c \lim_{r_n \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta\mu_i = c \int_{\Phi} f(P) d\mu.$$

2. $\int_{\Phi} (f(P) \pm g(P)) d\mu = \int_{\Phi} f(P) d\mu \pm \int_{\Phi} g(P) d\mu$.

3. Свойство аддитивности. Пусть фигура Φ состоит из двух частей, т.е.

$$\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2, \text{ тогда } \int_{\Phi} f(P) d\mu = \int_{\Phi_1} f(P) d\mu + \int_{\Phi_2} f(P) d\mu.$$

1.6. Свойства интегралов по фигуре, определяемые неравенствами (оценка интегралов по фигуре)

1. Если для любой точки $P \in \Phi$ $f(P) \geq 0$, то $\int_{\Phi} f(P) d\mu \geq 0$.
2. Если для любой точки $P \in \Phi$ $f(P) \geq g(P)$, то $\int_{\Phi} f(P) d\mu \geq \int_{\Phi} g(P) d\mu$.
3. Если существуют такие два числа m, M , что $m \leq f(P) \leq M$, то $m\mu \leq \int_{\Phi} f(P) d\mu \leq M\mu$, где μ – мера Φ .

Пример:

$$1) m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

$$2) mS \leq \iint_D f(x, y) dS \leq MS.$$

$$3) mV \leq \iiint_G f(x, y, z) dv \leq MV.$$

$$4) mL \leq \int_L f(x, y, z) dl \leq ML.$$

$$5) mS_{\text{нос}} \leq \iint_{\Sigma} f(x, y, z) d\sigma \leq MS_{\text{нос}}.$$

Т **Теорема о среднем.** Если функция $f(P)$ непрерывна в замкнутой ограниченной области Φ , то существует точка $\bar{P} \in \Phi$, такая, что выполняется равенство: $\int_{\Phi} f(P) d\mu = \mu f(\bar{P})$.

Физический смысл теоремы о среднем

Пусть фигура Φ обладает массой, распределенной с плотностью $f(P) = \rho(P)$, тогда $m = \int_{\Phi} f(P) d\mu = \mu f(\bar{P})$. В случае пространственной фи-

гуры мера фигуры равна объему $\mu = V$, $m = V \rho(\bar{P})$, $\rho(\bar{P}) = \frac{m}{V}$ - среднее значение плотности.

Геометрический смысл интегралов по фигуре

Пусть $f(P) \equiv 1$, тогда интеграл по фигуре будет равен мере соответствующей фигуры, т. е. $\int_{\Phi} d\mu = \mu$. В частных случаях:

1. $\int_a^b dx = b - a$ - длина отрезка $[a, b]$.

2. $\iint_D dS = S$ - площадь области D .

3. $\iiint_G dV = V$ - объем пространственной области G .

4. $\int_L dl = L$ - длина линии L .

5. $\iint_{\Sigma} d\sigma = S_{\Sigma}$ - площадь поверхности Σ .

Механический смысл интегралов по фигуре

Если функция $f(P) = \rho(P)$ является плотностью фигуры, то масса фигуры выражается интегралом по фигуре

$$\int_{\Phi} \rho(P) d\mu = m.$$

2.1. Двойной интеграл. Геометрический смысл двойного интеграла

Рассмотрим фигуру, которая является частью плоскости xOy : $\Phi \leftrightarrow D$. Интеграл по фигуре в данном случае является двойным интегралом от функции $f(P) = f(x, y)$ по области D : $\iint_D f(P) dS = \lim_{r_n \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta S_i$.

Задача о вычислении объема тела

Найдем объем тела, ограниченного сверху непрерывной поверхностью $z = f(x, y)$, снизу замкнутой областью D плоскости xOy и сбоку цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны оси Oz , а направляющей является граница Γ области D .

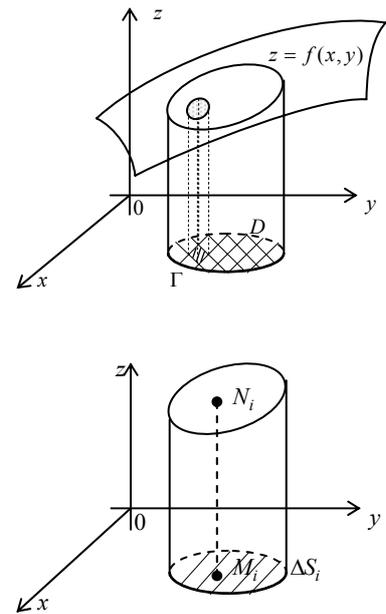
Разобьем основание D на конечное число элементарных ячеек $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$. В каждой ячейке выберем точку $M_i(x_i, y_i) \in \Delta S_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) и построим столбик с основанием ΔS_i и высотой $M_i N_i = f(x_i, y_i)$.

Если приближенно принять каждый столбик за прямой цилиндр, то в этом приближении его объем равен $\Delta V_i \approx f(x_i, y_i) \cdot \Delta S_i$, а объем всего тела

приближенно равен $V \approx \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta S_i$. Перейдем к пределу

$$V = \lim_{r_n \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta S_i = \iint_D f(x, y) dS = \iint_D f(P) dS.$$

Вывод: если $f(x, y) \geq 0$, то $\iint_D f(x, y) dS$ представляет объем криволинейного цилиндра, построенного на области D и ограниченного сверху поверхностью $f(x, y)$.



2.2. Вычисление двойного интеграла

Рассмотрим прямоугольную область интегрирования $D = \{x \in [a, b]; y \in [c, d]\}$. Найдем объем тела, ограниченного поверхностью $z = f(x, y)$, плоскостью $z = 0$ и цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны оси Oz , а направляющей служит граница области D .

Вычислим объем по площадям параллельных сечений.

Проведем плоскость $x = \text{const}$ ($a < x < b$). Фигура, получающаяся в сечении, представляет собой криволинейную трапецию, ограниченную линиями: $z = f(x, y)$ ($x = \text{const}$), $z = 0$, $y = c$, $y = d$. Площадь сечения равна:

$$S(x) = \int_c^d f(x, y) dy.$$

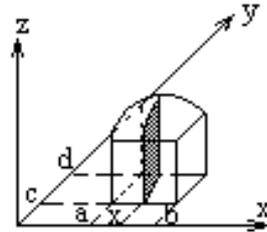
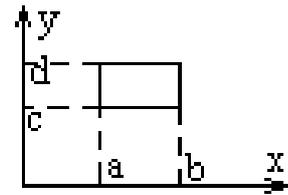
Объем всего тела равен

$$V = \int_a^b S(x)dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy \right) dx.$$

Ранее было показано, что объем такого тела равен двойному интегралу от $f(x, y)$ по области D , таким образом:

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy \right) dx.$$

Аналогично: $\iint_D f(x, y)dxdy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)dx.$



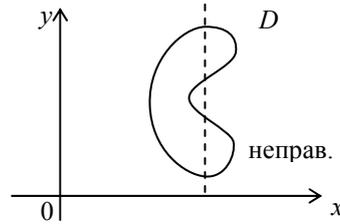
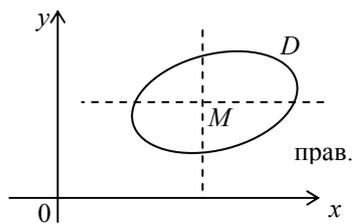
! Запись двойного интеграла $\iint_D f(x, y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy \right) dx$ называют

повторным интегралом, при этом

$\int_c^d f(x, y)dy$ - называют **внутренним**, а $\int_a^b \{...\}dx$ **внешним** интегралом.

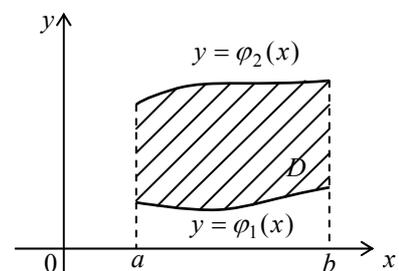
Рассмотрим произвольную область интегрирования.

о Область D в плоскости xOy называется **правильной** в направлении y или x , если каждая прямая, параллельная соответствующей координатной оси и проходящая через внутреннюю точку области, пересекает границу области в двух точках.



т Двойной интеграл от непрерывной функции $f(x, y)$ по правильной области D равен двукратному интегралу от этой функции по области D .

Пусть D - правильная область в направлении Oy , ограниченная линиями: $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$, $x = a$, $x = b$.



Тогда

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy \right) dx.$$

Рассмотрение проводится аналогично предыдущему случаю; при этом площадь сечения вычисляется так:

$$S(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy,$$

а объем всего тела: $V = \int_a^b S(x) dx = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx.$

Таким образом,

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

Аналогично, если D - правильная область в направлении Ox , ограниченная линиями $x = \psi_1(y)$, $x = \psi_2(y)$, $y = c$, $y = d$, то объем тела равен

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

!

1). **Правило вычисления двойных интегралов.** Для того чтобы вычислить двойной интеграл по произвольной правильной области D , необходимо свести его к повторному (двукратному) интегралу и проинтегрировать функцию по одной из переменных в пределах, соответствующих произвольному, но неизменному значению другой переменной, а затем результат проинтегрировать в пределах ее полного изменения.

2). Представление двойного интеграла в виде двукратного зависит от вида области D .

3). Порядок интегрирования может быть изменен в соответствии с равенствами

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx.$$

4). Если область D неправильная, то ее разбивают на конечное число правильных областей D_i и на основании свойств полагают, что двойной интеграл по области D равен сумме двойных интегралов по областям D_i .

5). Внешний интеграл всегда вычисляется в постоянных пределах.

6). Если пределы интегрирования в повторном интеграле от непрерывной функции конечны и **постоянны**, то результат не зависит от порядка интегрирования.

Пример:

Вычислите $\iint_D xy^2 dx dy$, если область D задана неравенствами: $0 \leq x \leq 1$,

$$-2 \leq y \leq 3.$$

Решение:

$$\iint_D xy^2 dx dy = \int_0^1 x dx \int_{-2}^3 y^2 dy = \int_0^1 x dx \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_{-2}^3 = \int_0^1 x \left(\frac{27+8}{3} \right) dx = \frac{35}{3} \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{35}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{35}{6} \text{ или}$$

$$\iint_D xy^2 dx dy = \int_{-2}^3 y^2 dy \int_0^1 x dx = \int_{-2}^3 y^2 dy \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \int_{-2}^3 y^2 dy = \frac{1}{2} \frac{y^3}{3} \Big|_{-2}^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{35}{3} = \frac{35}{6}.$$

Пример:

Вычислите $\iint_D x^2 y dx dy$, где D - треугольник с

вершинами: $O(0,0)$, $A(2,0)$, $B(2,1)$.

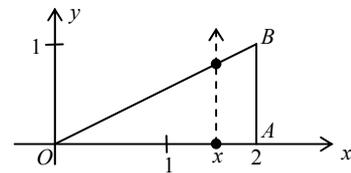
Решение:

Область D , ограниченная прямыми: $y = 0$,

$y = \frac{x}{2}$, $x = 2$, является правильной. При фикс-

сированном x y изменяется от 0 до $\frac{x}{2}$:

$$\iint_{\Delta OAB} x^2 y dx dy = \int_0^2 x^2 dx \int_0^{x/2} y dy = \int_0^2 x^2 dx \frac{y^2}{2} \Big|_0^{x/2} = \frac{1}{8} \int_0^2 x^4 dx = \frac{1}{8} \frac{x^5}{5} \Big|_0^2 = \frac{4}{5}.$$

**Пример:**

Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле:

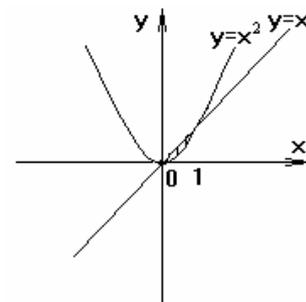
$$\int_0^1 dx \int_{x^2}^x f(x, y) dy.$$

Решение:

Область интегрирования D ограничена прямой $y = x$ и параболой $y = x^2$ и является правильной как в отношении оси Ox , так и Oy с верхней границей $y = x$ и нижней $y = x^2$. Всякая прямая, параллельная оси Ox , пересекает границу области не более чем в двух точках, следовательно, можно вычислить интеграл, полагая внешние пределы интегрирования $y = 0, y = 1$.

При этом пределы во внутреннем интеграле будут иметь вид: нижний предел $x_1 = y$, верхний $x_2 = +\sqrt{y}$.

$$\text{Таким образом: } \int_0^1 dx \int_{x^2}^x f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x, y) dx$$



Пример:

Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле, если область D – кольцо.

$$D: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

D – неправильная область.

Разобьем ее на четыре правильных области:

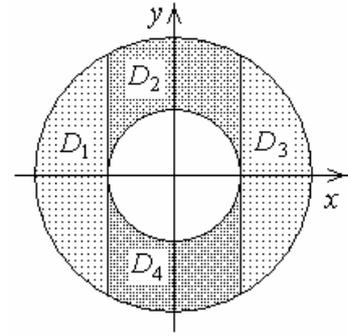
$$\iint_D \dots = \iint_{D_1} \dots + \iint_{D_2} \dots + \iint_{D_3} \dots + \iint_{D_4} \dots$$

Границами правильных областей являются дуги соответствующих ок-

ружностей $y = \pm\sqrt{1-x^2}$, $y = \pm\sqrt{4-x^2}$ и прямые $x = \pm 1$.

$$\iint_D \dots = \iint_{D_1} \dots + \iint_{D_2} \dots + \iint_{D_3} \dots + \iint_{D_4} \dots =$$

$$= \int_{-2}^{-1} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \dots dy + \int_{-1}^1 dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \dots dy + \int_1^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \dots dy + \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} \dots dy.$$

**Пример:**

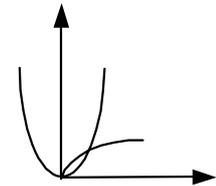
Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $D: \begin{cases} y = x^2 \\ y = \sqrt{x} \end{cases}$

Решение:

Полагаем $f(x, y) \equiv 1$;

$$\iint_D f(x, y) dS = \iint_D dS = \iint_D dx dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy = \int_0^1 (y|_{x^2}^{\sqrt{x}}) dx =$$

$$= \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \int_0^1 \sqrt{x} dx - \int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 - \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$



2.3. Замена переменных в двойном интеграле

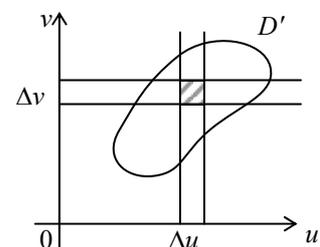
В некоторых случаях вычисление двойных интегралов значительно упрощается, если изменить область интегрирования, осуществив замену переменных в двойном интеграле.

Рассмотрим $\iint_D f(x, y) dx dy$. Если координаты x

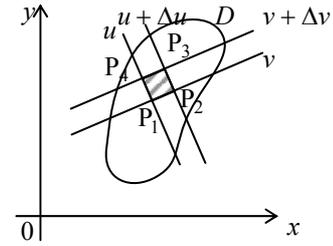
и y являются функциями новых переменных u и

$v: \begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \end{cases}$ то каждой точке $M(x, y)$ на плоскости xOy однозначно соот-

ветствует точка $M'(u, v)$ на плоскости uOv , а числа u и v называются **криволинейными координатами** точки M .



При этом область D отобразится в область D' на плоскости uOv , и каждому значению $f(x, y)$ в области D соответствует то же значение $f(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$ в области D' .



Разбиение области D' на прямоугольные площадки приводит к разбиению области D на криволинейные четырехугольники с вершинами $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$, $P_4(x_4, y_4)$, где $x_1 = x(u, v)$, $x_2 = x(u + \Delta u, v)$, $x_3 = x(u + \Delta u, v + \Delta v)$, $x_4 = x(u, v + \Delta v)$, $y_1 = y(u, v)$, $y_2 = y(u + \Delta u, v)$, $y_3 = y(u + \Delta u, v + \Delta v)$, $y_4 = y(u, v + \Delta v)$.

Заменяя приращения функций $x(u, v)$ и $y(u, v)$ соответствующими дифференциалами по формуле $f(u + \Delta u, v + \Delta v) \approx f(u, v) + \frac{\partial f}{\partial v} \Delta v + \frac{\partial f}{\partial u} \Delta u$, можно считать, что $x_1 = x(u, v)$, $x_2 = x(u, v) + \frac{\partial x}{\partial u} \Delta u$, $x_3 = x(u, v) + \frac{\partial x}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial x}{\partial v} \Delta v$, $x_4 = x(u, v) + \frac{\partial x}{\partial v} \Delta v$, $y_1 = y(u, v)$, $y_2 = y(u, v) + \frac{\partial y}{\partial u} \Delta u$, $y_3 = y(u, v) + \frac{\partial y}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial y}{\partial v} \Delta v$, $y_4 = y(u, v) + \frac{\partial y}{\partial v} \Delta v$. Четырехугольник при этом можно рассматривать как параллелограмм. Его площадь

$$\begin{aligned}
 S &= \left| [\overline{P_4 P_3} \times \overline{P_2 P_3}] \right| = \left| \begin{vmatrix} x_3 - x_4 & x_3 - x_2 \\ y_3 - y_4 & y_3 - y_2 \end{vmatrix} \right| = \\
 &= \left| (x_3 - x_4)(y_3 - y_2) - (x_3 - x_2)(y_3 - y_4) \right| = \\
 &= \left| \left(\frac{\partial x}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial x}{\partial v} \Delta v \right) \frac{\partial y}{\partial v} \Delta v - \frac{\partial x}{\partial v} \Delta v \left(\frac{\partial y}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial y}{\partial v} \Delta v \right) \right| = \\
 &= \left| \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} \Delta u \Delta v - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \Delta u \Delta v \right) \right| = \left| \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) \Delta u \Delta v \right| = \left| \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \Delta u \Delta v \right|.
 \end{aligned}$$

Определитель $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$ называется **якобианом** преобразования.

Предельный переход при неограниченном возрастании числа разбиений области для соответствующих интегральных сумм приводит к формуле преобразования координат в двойном интеграле:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(x(u, v), y(u, v)) |J| du dv, \text{ где } J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Пример:

Вычислите $\iint_D (y-x) dx dy$, если область D зада-

на уравнениями $y = x+1$, $y = x-3$, $y = -\frac{x}{3} + \frac{7}{3}$,

$y = -\frac{1}{3}x + 5$.

Решение:

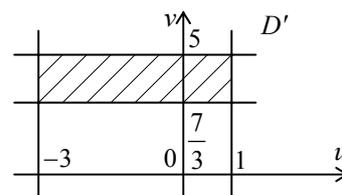
Сделаем замену переменных: $\begin{cases} u = y - x, \\ v = y + \frac{x}{3}, \end{cases}$ тогда область D' будет зада-

ваться прямыми: $u = 1$, $u = -3$, $v = \frac{7}{3}$, $v = 5$. Для вычисления якобиана преоб-

разования выразим x и y через u и v : $x = -\frac{3}{4}u + \frac{3}{4}v$, $y = \frac{1}{4}u + \frac{3}{4}v$.

При этом $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{vmatrix} = -\frac{9}{16} - \frac{3}{16} = -\frac{3}{4}$ и $\iint_D (y-x) dx dy =$

$$= \iint_{D'} \left[\left(\frac{1}{4}u + \frac{3}{4}v \right) - \left(-\frac{3}{4}u + \frac{3}{4}v \right) \right] \cdot \frac{3}{4} du dv = \iint_{D'} \frac{3}{4} u du dv = \int_{\frac{7}{3-3}}^5 \int_{-3}^1 \frac{3}{4} u du dv = -8.$$



2.4. Двойной интеграл в полярных координатах

Перейдем в полярную систему координат $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$ и вычислим якобиан перехода: Если $u = \varphi$, $v = \rho$, $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, то

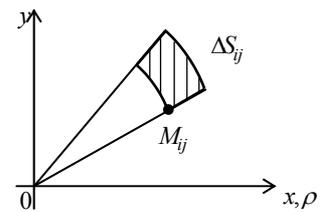
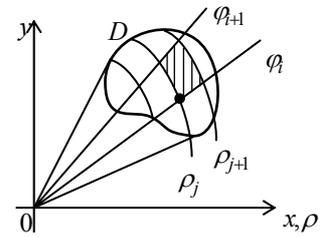
$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho \cos^2 \varphi + \rho \sin^2 \varphi = \rho,$$

и

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \cdot \rho d\rho d\varphi$$

2.4.1. Дифференциальный элемент площади в полярной системе координат

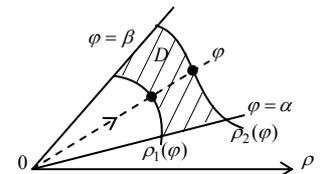
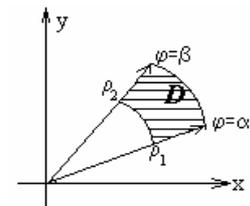
Разобьем область интегрирования на элементарные ячейки ΔS_{ij} с помощью координатных линий: $\rho = \rho_j$ - окружности, $\varphi = \varphi_i$ - лучи, тогда $\Delta\rho_j = \rho_{j+1} - \rho_j$, $\Delta\varphi_i = \varphi_{i+1} - \varphi_i$. Так как окружности ортогональны радиусам, то внутренние ячейки ΔS_{ij} с точностью до бесконечно малых более высокого порядка малости относительно их площади можно рассматривать как прямоугольники со сторонами $\rho_j \cdot \Delta\varphi_i$ и $\Delta\rho_j$, поэтому $\Delta S_{ij} \approx (\rho_j \Delta\varphi_i) \cdot \Delta\rho_j$. Ячейками неправильной формы пренебрегаем. Переходя к пределу, получим, что двумерный элемент площади в полярных координатах равен $dS = \rho d\rho d\varphi$.



! 1). Интегрирование в полярной системе координат удобно использовать, когда область D ограничена дугами окружностей.

2). В полярных координатах внешний интеграл при сведении его к повторному может вычисляться по углам.

Пусть область интегрирования D определяется неравенствами: $\alpha \leq \varphi \leq \beta$, $\rho_1(\varphi) \leq \rho \leq \rho_2(\varphi)$, где $\rho_1(\varphi)$ и $\rho_2(\varphi)$ - однозначные непрерывные функции на отрезке $[\alpha, \beta]$.



$$\iint_D f(\rho, \varphi) \rho d\rho d\varphi = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho, \varphi) \rho d\rho.$$

3). В полярных координатах внешний интеграл может вычисляться и по полярному радиусу. Пусть область интегрирования D определяется неравенствами: $R_1 \leq \rho \leq R_2$, $\varphi_1(\rho) \leq \varphi \leq \varphi_2(\rho)$, где $\varphi_1(\rho)$ и $\varphi_2(\rho)$ - однозначные непрерывные функции на отрезке $[R_1, R_2]$.

$$\iint_D f(\rho, \varphi) \rho d\rho d\varphi = \int_{R_1}^{R_2} \rho d\rho \int_{\varphi_1(\rho)}^{\varphi_2(\rho)} f(\rho, \varphi) d\varphi.$$

Пример:

Записать в полярных координатах двойной интеграл по области D :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \text{ - кольцо.}$$

Решение: полярные координаты

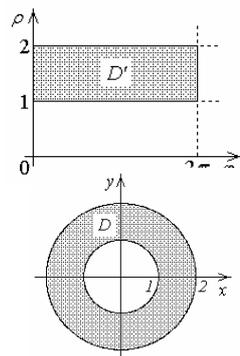
$$x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi.$$

$$\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = 1, \quad \rho^2 = 1, \quad \rho_1 = 1,$$

аналогично $\rho_2 = 2$.

Область интегрирования в полярных координатах D' — прямоугольник: $1 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f'(\rho, \varphi) \rho d\rho d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\rho=1}^{\rho=2} f'(\rho, \varphi) \rho d\rho.$$

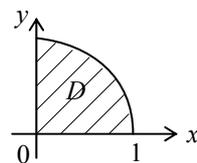
**Пример:**

Вычислите $\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, где D - первая четверть круга

$R = 1$ с центром в точке $O(0, 0)$.

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, D: 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \rho \leq 1.$$

$$\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \iint_D \frac{\rho d\rho d\varphi}{\rho} = \iint_D d\rho d\varphi = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 d\rho = \frac{\pi}{2} \cdot 1 = \frac{\pi}{2}.$$

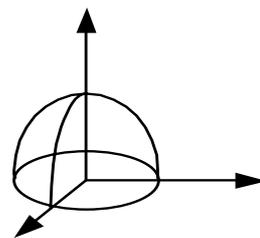
**Пример:**

Найти объем тела, если оно задается поверх-

$$\text{ностями: } \begin{cases} z = 1 - x^2 - y^2; \\ z = 0. \end{cases}$$

Решение:

Область интегрирования – проекция фигуры на плоскость xOy . Граница D : $x^2 + y^2 = 1$ - окружность.



Перейдем в полярную систему координат: $D': \begin{cases} r = 1 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$,

$$\begin{aligned} V &= \iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D (1 - x^2 - y^2) dx dy = \\ &= \iint_{D'} (1 - r^2) r dr d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (1 - r^2) r dr = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4} \varphi \Big|_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

2.5. Поверхностный интеграл первого типа (рода)

Поверхностные интегралы первого типа – это обобщение двойных интегралов по области D . Рассмотрим фигуру, которая является поверхностью Σ ; $\Phi \rightarrow \Sigma$. Интеграл по фигуре в данном случае является поверхностным интегралом первого рода от функции $f(P) = f(x, y, z)$ по поверхности Σ :

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) d\sigma = \lim_{r_n \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta\sigma_i$$

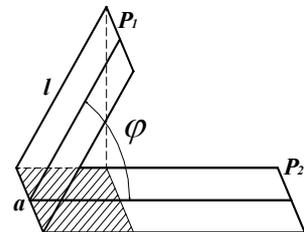
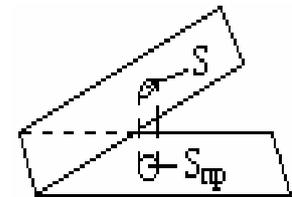
2.5.1. Вычисление поверхностных интегралов первого рода

Вычислим $\iint_{\Sigma} f(x, y, z) d\sigma$. Пусть $f(x, y, z) \geq 0$, а поверхность Σ задана уравнением $z = f(x, y)$.

Лемма. Площадь проекции плоского участка одной плоскости P_1 на другую P_2 равна площади самого участка, умноженной на модуль косинуса двугранного угла между плоскостями: $S_{np} = S \cdot |\cos \varphi|$.

Доказательство:

$S = l \cdot a$; $S_{np} = a \cdot l \cdot |\cos \varphi| = S |\cos \varphi|$ (поскольку $S_{np} \geq 0$, косинус берется по модулю).



Пусть требуется вычислить поверхностный интеграл первого рода по поверхности Σ . Область D является проекцией поверхности Σ на плоскость xOy . Через точку поверхности $A(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ проведем касательную плоскость. Ее уравнение:

$z - \bar{z} = \frac{\partial z}{\partial x}(x - \bar{x}) + \frac{\partial z}{\partial y}(y - \bar{y})$. Выберем часть поверхности $d\sigma$ и спроектируем ее на касательную плоскость. Обозначим проекцию $d\tilde{\sigma}$. Будем считать $d\sigma \sim d\tilde{\sigma}$. Обозначим \vec{n} - нормаль к касательной плоскости:

$\vec{n} \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, -1 \right)$. Поскольку $\vec{k}(0, 0, 1)$ - нормаль к xOy , то угол φ - угол между касательной плоскостью и плоскостью Oxy равен углу между векторами \vec{n} и \vec{k} .

Найдем связь между dS (проекцией $d\tilde{\sigma}$ на плоскость xOy) и $d\tilde{\sigma}$

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{n}, \vec{k})}{|\vec{n}| \cdot |\vec{k}|} = \frac{-1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}};$$

$$|\cos \varphi| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}; \text{ в пределе при}$$

$$r_n \rightarrow 0, \quad d\sigma = d\tilde{\sigma}, \quad dS = d\sigma \cdot |\cos \varphi|, \quad d\sigma = \frac{dS}{|\cos \varphi|};$$

$$d\sigma = dS \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2};$$

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) d\sigma = \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y)) dS \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}.$$

Так записывается поверхностный интеграл, если поверхность задана уравнением $z = z(x, y)$.

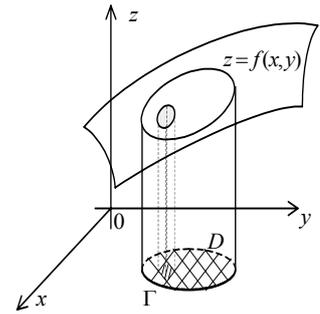
Если поверхность задана уравнением $y = y(x, z)$, то

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) d\sigma = \iint_{D_{xz}} f(x, y(x, z), z) \cdot \sqrt{(y'_x)^2 + (y'_z)^2 + 1} \cdot dS.$$

Аналогично, если $x = x(y, z)$, то

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) d\sigma = \iint_{D_{yz}} f(x(y, z), y, z) \cdot \sqrt{1 + (x'_y)^2 + (x'_z)^2} \cdot dS,$$

где D_{xz}, D_{yz} - проекции Σ на плоскости Oxz, Oyz .



3.1. Тройной интеграл

Рассмотрим фигуру, которая является пространственной областью G . Интеграл по фигуре в данном случае является тройным интегралом от функции $f(P) = f(x, y, z)$ по пространственной области G :

$$\int_{\Phi} f(x, y, z) d\mu = \iiint_G f(x, y, z) dV = \lim_{r_n \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta V_i.$$

Область G будем называть правильной в направлении оси Oz , если:

- 1) любая прямая, параллельная оси Oz , пересекает границу области G не более чем в двух точках;
- 2) область G проектируется на координатную плоскость Oxy в правильную плоскую область D ;
- 3) любая часть области G удовлетворяет первым двум пунктам.

Примером таких областей является эллипсоид, куб, параллелепипед.

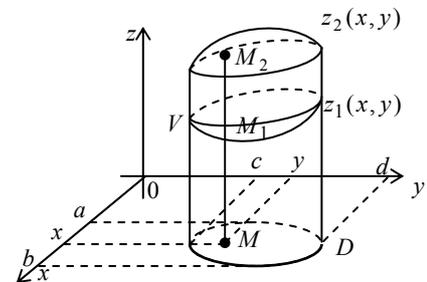
3.1.1. Задача о вычислении массы тела

Пусть область V является правильной в направлении оси Oz , то есть ограничена снизу и сверху соответственно однозначными непрерывными поверхностями: $z_1 = z_1(x, y)$ и $z_2 = z_2(x, y)$, причем проекцией области V на координатную плоскость Oxy является плоская область D , ограниченная линиями:

$$y = y_1(x), \quad y = y_2(x), \quad x = a, \quad x = b.$$

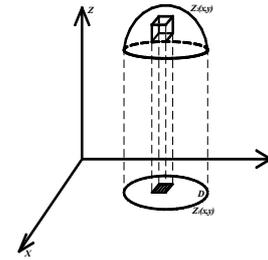
Прямая, параллельная оси Oz , пересекает координатную плоскость Oxy и поверхности $z_1 = z_1(x, y)$ и $z_2 = z_2(x, y)$, соответственно, в точках $M(x, y, 0)$, $M_1(x, y, z_1)$, $M_2(x, y, z_2)$. Отсюда следует, что при фиксированных значениях $(x, y) \in D$ соответствующие аппликаты z точек области V изменяются в пределах: $z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)$.

Пусть тело V материально, а объемная плотность $\rho = \rho(P) = \rho(x, y, z) = f(x, y, z)$. По физическому смыслу интеграла по фигуре $m = \iiint_V \rho(x, y, z) dV$. Вычислим массу данного тела. Для этого рассечем тело



плоскостями, параллельными координатным плоскостям:

$$\left. \begin{array}{l} x, \quad x + \Delta x \\ y, \quad y + \Delta y \\ z, \quad z + \Delta z \end{array} \right\}.$$



Этими плоскостями тело разбивается на параллелепипеды, объем каждого из которых равняется $\Delta V_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i \cdot \Delta z_i$. Выберем в пределах каждого из них по точке $M_i(x_i, y_i, z_i)$.

Примем приближенно, что в пределах части ΔV_i плотность постоянна и равна $\rho(x_i, y_i, z_i)$. Тогда масса части ΔV_i равна $m_i \approx \rho(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta V_i$, $m_i \approx \rho(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta S_i \cdot \Delta z_i$, а масса всего тела равна $m \approx \sum_{i=1}^n \rho(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i$. Если диаметры всех элементарных частей стремятся к нулю, то в пределе это равенство становится точным и $m = \lim_{\max d_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i$, $r_n \rightarrow 0$, $\Delta V_i \rightarrow dV$, $\Delta S_i \rightarrow dS$. Вычислим массу столбика с основанием dS :

$$m_i = dS \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \rho(x, y, z) dz.$$

Масса всего тела $m = \lim_{\max d_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n m_i \Delta S_i$,

следовательно, $m = \iint_D dS \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \rho(x, y, z) dz$.

Таким образом $\iiint_V f(x, y, z) dV = \iint_D dS \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \rho(x, y, z) dz$.

! Для вычисления \iiint_V необходимо вычислить интеграл по переменной z , считая x и y фиксированными переменными, а затем вычислить \iint по проекции этого тела D на плоскость xOy :

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z) dz.$$

Таким образом, чтобы вычислить \iiint по правильной области V , необходимо вычислить трехкратный повторный интеграл.

!

1). $dV = dx dy dz$ называют дифференциальным элементом объема в декартовой системе координат.

2). В повторных интегралах пределы интегрирования могут зависеть только от тех переменных, по которым еще не проведено интегрирование. Внешний интеграл всегда вычисляется в постоянных пределах.

3) Если область D задана неравенствами $c \leq y \leq d$, $x_1(y) \leq x \leq x_2(y)$, то

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

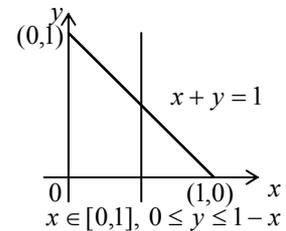
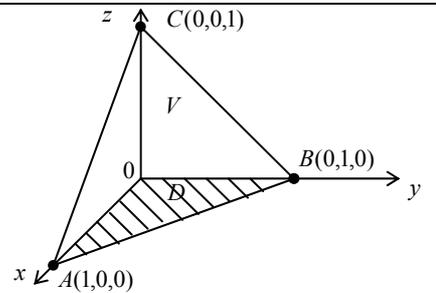
Пример:

Вычислите $\iiint_G xyz dx dy dz$, где G - пирамида, ограниченная плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$.

Решение:

Плоскость ABC : $x + y + z = 1$. Проекция области V на плоскость xOy есть $\triangle OAB$, ограниченный прямыми $x = 0$, $y = 0$, AB : $x + y = 1$.

При $(x, y) \in D$ аппликаты точек $(x, y, z) \in V$ удовлетворяют неравенству $0 \leq z \leq 1 - x - y$.



$$\begin{aligned} \iiint_G xyz dx dy dz &= \int_0^1 x dx \int_0^{1-x} y dy \int_0^{1-x-y} z dz = \int_0^1 x dx \int_0^{1-x} y dy \frac{z^2}{2} \Big|_0^{1-x-y} = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 x dx \int_0^{1-x} y [(1-x)^2 - 2(1-x)y + y^2] dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 x \left[(1-x)^2 \frac{y^2}{2} - 2(1-x) \frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{4} \right]_0^{1-x} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x (1+x)^4 \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right) dx = \\ &= \frac{1}{24} \int_0^1 [1 - (1-x)] (1-x)^4 dx = \frac{1}{24} \left\{ \int_0^1 (1-x)^4 dx - \int_0^1 (1-x)^5 dx \right\} = \\ &= \frac{1}{24} \left[-\frac{(1-x)^5}{5} \Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{(1-x)^6}{6} \Big|_{x=0}^{x=1} \right] = \frac{1}{24} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{720}. \end{aligned}$$

3.2. Замена переменных в тройном интеграле

Цель: упростить вычисление интеграла.

Т Если функции $x = x(u, v, t)$, $y = y(u, v, t)$, $z = z(u, v, t)$ являются непрерывно дифференцируемыми и взаимно однозначно отображают точки пространства u, v, t на точки пространства x, y, z и наоборот и якобиан перехода, численно равный определителю третьего порядка, не равен нулю

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{vmatrix},$$

то при замене переменных в тройном интеграле справедлива формула

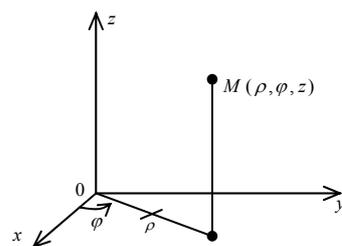
$$\iiint_G f(x, y, z) dV = \iiint_{G'} f^*(u, v, t) |J| \underbrace{du dv dt}_{dV'}.$$

Частным случаем преобразования координат является переход от декартовых координат к цилиндрическим и сферическим координатам.

3.3. Тройной интеграл в цилиндрических координатах

Цилиндрические координаты представляют собой соединение полярных координат в плоскости xOy с декартовой аппликатой z .

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, & 0 \leq \rho < \infty, \\ y = \rho \sin \varphi, & 0 \leq \varphi < 2\pi, \\ z = z, & -\infty < z < \infty. \end{cases}$$



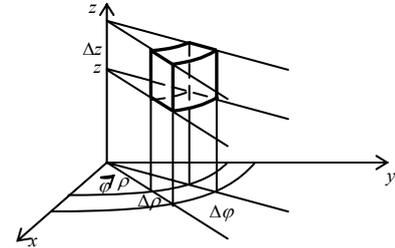
Найдем якобиан перехода:

$$J(\rho, \varphi, z) = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \cdot \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \rho \cdot \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho \cdot \cos^2 \varphi + \rho \cdot \sin^2 \varphi = \rho;$$

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V'} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) \rho d\rho d\varphi dz.$$

3.3.1. Элемент объема в цилиндрических координатах

Для вычисления элемента объема в цилиндрических координатах разобьем область V координатными поверхностями: $\varphi = \varphi_i$ - полуплоскости, проходящие через Oz , $\rho = \rho_j$ - круговые цилиндры; $z = z_k$ - плоскости, перпендикулярные оси Oz . Элементарным объемом будет криволинейная призма.



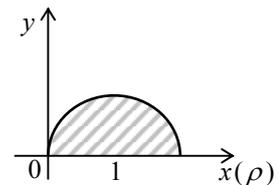
Площадь основания с точностью до бесконечно малых высшего порядка равна $(\rho \Delta \varphi) \Delta \rho$; высота равна Δz . Тогда

$$\Delta V \approx \rho \cdot \Delta \varphi \cdot \Delta \rho \cdot \Delta z, dV = \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz.$$

Пример:

Вычислите $\iiint_V z \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy \, dz$, где область V

ограничена цилиндром $x^2 + y^2 = 2x$ и плоскостями $y \geq 0$, $z = 0$, $z = a$.



Решение:

Уравнение $x^2 + y^2 - 2x = (x-1)^2 + y^2 - 1 = 0$,

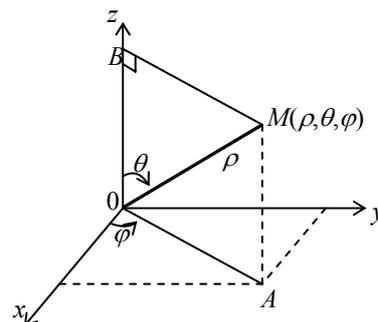
$(x-1)^2 + y^2 = 1$ представляет собой окружность с $R=1$ и центром в точке $(1,0)$. В полярных координатах $\rho^2 = 2\rho \cos \varphi$.

Пределы изменения новых переменных: $0 \leq z \leq a$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \rho \leq 2 \cos \varphi$.

$$\begin{aligned} \iiint_V z \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy \, dz &= \iiint_V z \rho \cdot \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} \rho^2 \, d\rho \int_0^a z \, dz = \\ &= \frac{1}{2} a^2 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} \rho^2 \, d\rho = \frac{4}{3} a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^3 \varphi \, d\varphi = \frac{4}{3} a^2 \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 \varphi) d(\sin \varphi) = \\ &= \frac{4}{3} a^2 \left[\sin \varphi - \frac{\sin^3 \varphi}{3} \right]_0^{\pi/2} = \frac{8}{9} a^2. \end{aligned}$$

3.4. Тройной интеграл в сферических координатах

Положение точки $M(x, y, z)$ в пространстве определяется тремя числами θ, ρ, φ . $M(x, y, z) \rightarrow M(\rho, \theta, \varphi)$. Сферические координаты ρ, θ, φ : ρ – радиус-вектор OM , θ – угол между радиус-вектором и осью Oz , φ – угол между проекцией ρ на плоскость xOy и осью Ox . Сферические координаты связаны с декартовыми следующими соотношениями:



$$\begin{cases} \rho \geq 0, \\ 0 \leq \theta \leq \pi, \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \end{cases} \quad \begin{cases} x = \rho \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi, \\ y = \rho \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi, \\ z = \rho \cdot \cos \theta. \end{cases}$$

При этом $x^2 + y^2 = \rho^2 \sin^2 \theta$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\varphi = \arctg \frac{y}{x}$, $\theta = \arctg \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$.

Якобиан перехода:

$$J(\rho, \varphi, \theta) = \begin{vmatrix} \sin \theta \cdot \cos \varphi & -\rho \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi & \rho \cdot \cos \theta \cdot \cos \varphi \\ \sin \theta \cdot \sin \varphi & \rho \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi & \rho \cdot \cos \theta \cdot \sin \varphi \\ \cos \theta & 0 & -\rho \cdot \sin \theta \end{vmatrix} = \rho^2 \cdot \sin \theta.$$

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V'} f^*(\rho, \theta, \varphi) \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta.$$

Пример:

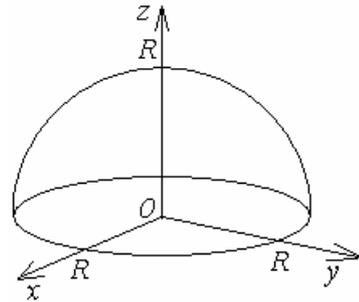
$$\begin{aligned} \text{Найти объем шара радиуса } R. V_{\text{шара}} &= \iiint_V dV = \iiint_V dx dy dz = \iiint_{V'} |J| d\rho d\varphi d\theta = \\ &= \iiint_{V'} \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta = \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho^2 d\rho = \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{R^3}{3} = \\ &= \int_0^\pi \sin \theta d\theta \frac{2\pi R^3}{3} = \frac{2\pi R^3}{3} \int_0^\pi \sin \theta d\theta = \frac{2\pi R^3}{3} (-\cos \theta) \Big|_0^\pi = \frac{4}{3} \pi R^3. \end{aligned}$$

Пример:

Вычислите $\iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz$, где V - верхняя половина шара $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$.

Решение:

Введем сферические координаты. Новые переменные изменяются в пределах:
 $0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.



Тогда

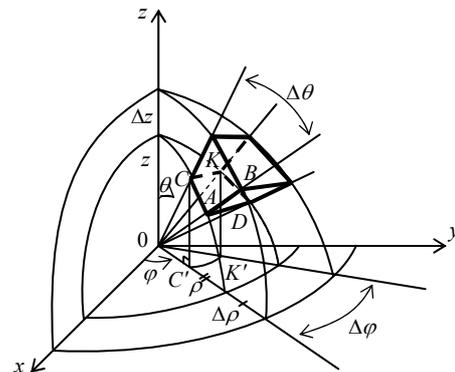
$$x^2 + y^2 = \rho^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi = \rho^2 \sin^2 \theta.$$

В результате

$$\begin{aligned} \iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz &= \iiint_{V'} \rho^4 \sin^3 \theta d\rho d\theta d\varphi = \int_0^R \rho^4 d\rho \int_0^{\pi/2} \sin^3 \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \\ &= 2\pi \int_0^R \rho^4 d\rho \int_0^{\pi/2} (\cos^2 \theta - 1) d(\cos \theta) = 2\pi \int_0^R \rho^4 d\rho \left[\frac{1}{3} \cos^3 \theta - \cos \theta \right]_0^{\pi/2} = \frac{4}{15} \pi R^5. \end{aligned}$$

3.4.1. Элемент объема в сферических координатах

Вычислим элемент объема в сферических координатах. Разобьем область на элементарные части ΔV координатными поверхностями: $\rho = \rho_i$ - сферы, $\theta = \theta_j$ - конические поверхности с вершиной в начале координат, $\varphi = \varphi_k$ - полуплоскости, проходящие через ось Oz .



Здесь $AB = \Delta\rho$; из $\Delta OCC'$: $C'O = \rho \cos(90^\circ - \theta) = \rho \sin \theta$. Дуги $AC = \rho \Delta\theta$, $AD = CK = C'K' = C'O \cdot \Delta\varphi = \rho \sin \theta \cdot \Delta\varphi$.

С точностью до бесконечно малых высшего порядка элементарный объем ΔV можно считать параллелепипедом с ребрами $\Delta\rho$, $\rho \Delta\theta$ и $\rho \sin \theta \Delta\varphi$.

Элемент объема $\Delta V \approx \rho^2 \Delta\rho \sin \theta \Delta\theta \Delta\varphi$, $dV = \rho^2 d\rho \sin \theta d\theta d\varphi$.

4.1. Криволинейные интегралы первого типа (рода)

Рассмотрим фигуру, которая является плоской либо пространственной кривой $\Phi \rightarrow L$. Интеграл по фигуре в данном случае является криволинейным интегралом первого рода от функции $f(P)$ по кривой L :

$$\int f(P)dl = \lim_{r_n \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(P_i)\Delta l_i, P_i \in L.$$

4.1.1. Криволинейный интеграл первого типа по плоской кривой

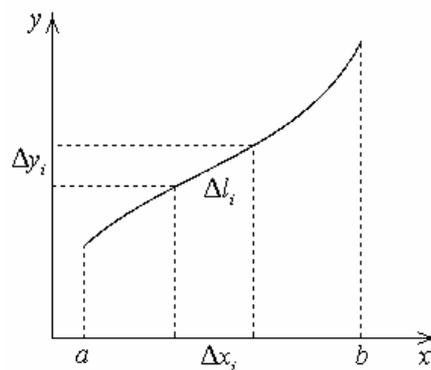
Пусть плоская кривая задана уравнением $L: y = \varphi(x)$.

Выберем бесконечно малый участок Δx_i на отрезке $a \leq x \leq b$. Тогда $\Delta l_i^2 \approx \Delta x_i^2 + \Delta y_i^2$,

$$\Delta l_i^2 \approx \left(1 + \frac{\Delta y_i^2}{\Delta x_i^2}\right)\Delta x_i^2, \Delta l_i \approx \sqrt{1 + \frac{\Delta y_i^2}{\Delta x_i^2}}\Delta x_i. \text{ Переходя к}$$

пределу при $\Delta x_i \rightarrow 0$, имеем $dl = \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx$,

$$\int_L f(x, y)dl = \int_a^b f(x, \varphi(x))\sqrt{1 + (y'_x)^2} dx.$$



! Чтобы вычислить криволинейный интеграл первого типа по плоской кривой, необходимо переменную y заменить на выражение $y = \varphi(x)$ (из уравнения линии), а dl заменить на $\sqrt{1 + (y'_x)^2} dx$ и вычислить определенный интеграл по x .

! Величина $dl = \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx$ называется дифференциальным элементом длины плоской кривой.

Если линия задана в параметрическом виде: $L: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \alpha \leq t \leq \beta$, то

$$y'_x = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t}, dl = \sqrt{1 + \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)^2} x'_t dt = \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt;$$

$$\int_L f(x, y)dl = \int_\alpha^\beta f(x(t), y(t))\sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt.$$

4.1.2. Криволинейный интеграл первого типа по пространственной кривой

$$L: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \quad \alpha \leq t \leq \beta, \quad dl = \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2} dt; \\ z = z(t) \end{cases}$$

$$\int_L f(x, y, z) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2} dt.$$

Пример:

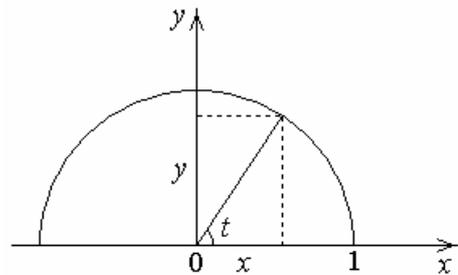
Найти массу полуокружности, заданную уравнениями:

$$L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y \geq 0. \end{cases} \quad \text{Линейная плотность}$$

$$\rho(x, y) = ky.$$

Уравнение полуокружности в параметри-

ческом виде имеет вид $L: \begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \\ 0 \leq t \leq \pi. \end{cases}$



$$m = \int_L \rho(x, y) dl = \int_L ky dl = k \int_0^{\pi} \sin t \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} dt = k \int_0^{\pi} \sin t dt =$$

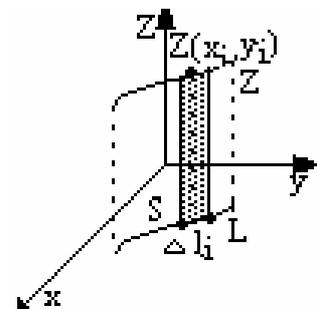
$$= k(-\cos t)_0^{\pi} = k(1+1) = 2k.$$

4.1.3. Геометрический смысл криволинейного интеграла первого типа по плоской кривой

Пусть на плоскости xOy задана кривая L . На множестве L определена функция $z = f(P) = f(x, y)$. Разобьем кривую L на n частей L_i длиной Δl_i . Выберем на кривой L точку P_i , вычислим значение функции $z = f(P_i) = f(x_i, y_i)$. Тогда площадь прямоугольного участка равна $\Delta S_i = f(x_i, y_i) \Delta l_i$.

Найдем сумму площадей $\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta l_i$.

Перейдем к пределу при $n \rightarrow \infty$, тогда



$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta l_i = \int_L f(p) dl.$$

Таким образом, криволинейный интеграл первого типа по плоской кривой численно равен площади боковой поверхности цилиндра с направляющей L и образующей, длина которой $z = f(P) = f(x, y)$.

4.2. Механические приложения интегралов по фигуре

4.2.1. Длина, площадь, объем фигуры

Длина отрезка равна $l = \int_a^b dx$, площадь плоской фигуры равна $S = \iint_D dx dy$,
объем тела $V = \iiint_V dx dy dz$.

4.2.2. Масса фигуры

Масса неоднородного тела с плотностью $\rho(x, y, z)$:

$$m = \iiint_V \rho(x, y, z) dx dy dz.$$

Пример:

Найдите массу тела, ограниченного цилиндрической поверхностью $x^2 = 2y$ и плоскостями $y+z=1$, $2y+z=2$, если в каждой его точке плотность $\rho(x, y, z) = y$.

Решение:

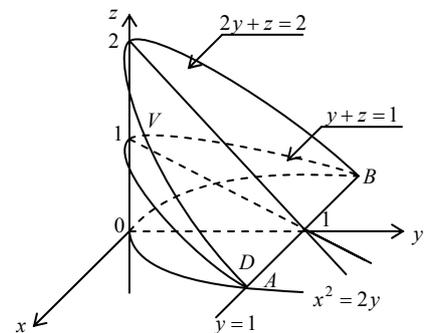
Из $y+z=1$ получаем, что при $z=0$ $y=1$, а при $y=0$ $z=1$; из $2y+z=2$ получаем, что при $z=0$ $y=1$, а при $y=0$ $z=2$.

Линии пересечения плоскостей с координатной плоскостью zOy : $z=1-y$ и $z=2(1-y)$.

В плоскости xOy направляющей цилиндрической поверхности является парабола $x^2 = 2y$.

Проекция тела на плоскость xOy D ограничена линиями: $y=1$, $0 \leq y \leq 1$;

$$x = \pm\sqrt{2y}, \quad -\sqrt{2y} \leq x \leq \sqrt{2y}.$$



$$m = \iiint_V y dx dy dz = \iint_D y dx dy \int_{1-y}^{2(1-y)} dz = \iint_D y(1-y) dx dy = \int_0^1 (y - y^2) dy \int_{-\sqrt{2y}}^{\sqrt{2y}} dx =$$

$$= \int_0^1 (y - y^2) 2\sqrt{2}y dy = 2\sqrt{2} \left(\frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{7}y^{\frac{7}{2}} \right) \Big|_0^1 = \frac{8\sqrt{2}}{35}$$

4.2.3. Момент инерции фигуры

Рассмотрим систему из n материальных точек с массами m_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Момент инерции системы относительно некоторой оси вращения $J = \sum_{i=1}^n r_i^2 m_i$, где r_i

— расстояние от i -й точки до оси вращения. Если

тело сплошное, то возникает интеграл по фигуре J

$$= \int_{\Phi} r^2 \rho(P) d\mu.$$

Осевые моменты (моменты инерции фигуры относительно осей координат). Рассмотрим пространственную фигуру $\Phi \rightarrow V$.

J_x - момент инерции относительно оси Ox (мера инертности тела при вращении относительно оси Ox):

$$J_x = \iiint_V (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dV,$$

$$J_y = \iiint_V (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) dV,$$

$$J_z = \iiint_V (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dV.$$

Моменты инерции относительно координатных плоскостей:

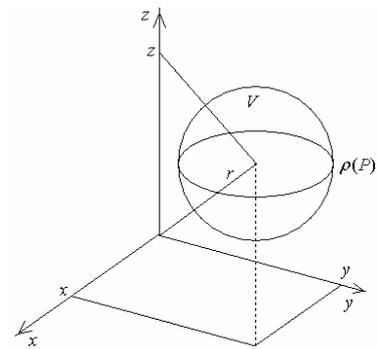
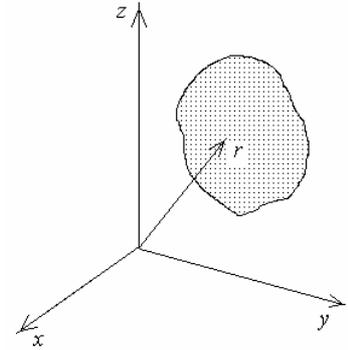
$$J_{xy} = \iiint_G z^2 \rho(x, y, z) dV,$$

$$J_{xz} = \iiint_G y^2 \rho(x, y, z) dV,$$

$$J_{yz} = \iiint_G x^2 \rho(x, y, z) dV,$$

Полярный момент (момент инерции относительно начала координат, где центр O – полюс):

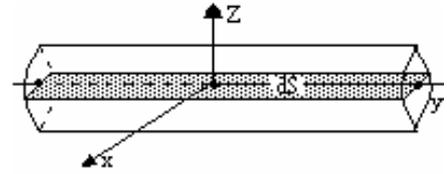
$$J_o = \iiint_G (x^2 + y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dV$$



Пример:

Найдите момент инерции однородной боковой поверхности цилиндра, задаваемой уравнениями:

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = R^2 & \rho(P) \equiv 1 \\ -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}; z \geq 0 & J_{xy} = ? \end{cases}$$



Решение:

$$\begin{aligned} J_{xy} &= \iint_{\Sigma} z^2 d\sigma = \iint_D z^2 \sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1} dS = \\ &= \iint_D (R^2 - x^2) \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} dS = \iint_D (R^2 - x^2) \cdot R \frac{1}{\sqrt{R^2 - x^2}} dS = \\ &= R \iint_D \sqrt{R^2 - x^2} dx dy = R \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} dx \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dy = \pi R \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} dx = \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} x &= R \sin t \\ dx &= R \cos t dt \\ \sin t &= \frac{x}{R} \\ t &= \arcsin \frac{x}{R} \\ -\frac{\pi}{2} &\leq t \leq \frac{\pi}{2} \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} &= \pi R \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{R^2 - R^2 \sin^2 t} R \cos t dt = \pi R \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R \cos t R \cos t dt = \\ &= \pi R^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \left\{ \cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2} \right\} = \frac{\pi^2 R^3}{2} \end{aligned}$$

Пример:

Вычислите момент инерции прямого кругового цилиндра высотой $2h$ и радиусом R относительно диаметра его среднего сечения, считая плотность постоянной и равной γ_0 .

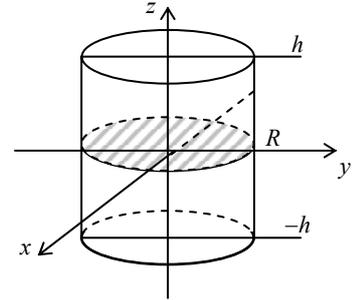
$$I = I_x = \iiint_V (y^2 + z^2) \gamma_0 dx dy dz .$$

Решение:

Перейдем к цилиндрическим координатам:

$$x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi, z = z; dx dy dz = \rho d\rho d\varphi dz ,$$

$$y^2 + z^2 = \rho^2 \sin^2 \varphi + z^2 .$$



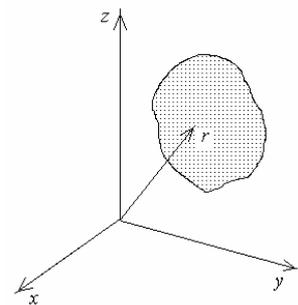
$$\begin{aligned} I &= \iiint_V (\rho^2 \sin^2 \varphi + z^2) \gamma_0 \rho d\rho d\varphi dz = 2\gamma_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho d\rho \int_0^h (\rho^2 \sin^2 \varphi + z^2) dz = \\ &= 2\gamma_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho d\rho \left[\rho^2 \sin^2 \varphi z + \frac{z^3}{3} \right]_0^h = 2\gamma_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho \left[\rho^2 \sin^2 \varphi \cdot h + \frac{h^3}{3} \right] d\rho = \\ &= 2\gamma_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \left[h \sin^2 \varphi \frac{\rho^4}{4} + \frac{h^3}{3} \frac{\rho^2}{2} \right]_0^R = 2\gamma_0 \int_0^{2\pi} \left[\frac{hR^4}{4} \sin^2 \varphi + \frac{h^3 R^2}{6} \right] d\varphi = \\ &\left\{ \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \left[\varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2} 2\pi = \pi \right\} \\ &= 2\gamma_0 \left[\frac{hR^4}{4} \pi + \frac{h^3 R^2}{6} 2\pi \right] = 2\gamma_0 h R^2 \pi \left[\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{3} \right]. \end{aligned}$$

4.2.4. Статические моменты фигуры. Центр тяжести фигуры

Рассмотрим n материальных точек массой m_i .

Координаты центра тяжести системы точек:

$$X_C = \frac{\sum_{i=1}^n x_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}; Y_C = \frac{\sum_{i=1}^n y_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}; Z_C = \frac{\sum_{i=1}^n z_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i} ,$$



где величины, равные
$$\left. \begin{aligned} M_{yz} &= \sum_{i=1}^n x_i m_i \\ M_{xz} &= \sum_{i=1}^n y_i m_i \\ M_{xy} &= \sum_{i=1}^n z_i m_i \end{aligned} \right\} ,$$
 называются статическими моментами системы относительно плоскостей yOz , xOz , xOy .

статическими моментами системы относительно плоскостей yOz , xOz , xOy .

! 1). Если система (фигура) имеет центр симметрии, ось симметрии, плоскость симметрии, то статические моменты соответственно относительно центра, оси, плоскости равны нулю.

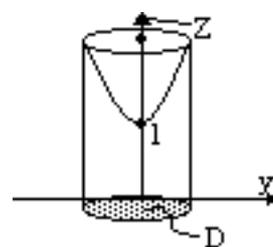
2). Если фигура непрерывна, то вместо сумм возникают соответствующие интегралы по фигуре

$$x_c = \frac{\int_{\Phi} x \rho(P) d\mu}{\int_{\Phi} \rho(P) d\mu}; y_c = \frac{\int_{\Phi} y \rho(P) d\mu}{\int_{\Phi} \rho(P) d\mu}; z_c = \frac{\int_{\Phi} z \rho(P) d\mu}{\int_{\Phi} \rho(P) d\mu}.$$

Пример:

Найдите центр тяжести однородного ($\gamma(P) = 1$) цилиндра, ограниченного поверхностями:

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 + 1, \\ x^2 + y^2 = 1, \\ z = 0. \end{cases}$$



Сверху цилиндр ограничен эллиптическим параболоидом.

Решение:

Из соображений симметрии $x_c = 0$, $y_c = 0$, т.к. статические моменты относительно плоскостей ZOY и ZOX равны нулю, $z_c = \frac{\int_V z \gamma(P) dV}{\int_V \gamma(P) dV}$.

Числитель:

$$\begin{aligned} \int_V z \gamma(P) dV &= \int_V z dV = \iint_D ds \int_0^{x^2+y^2+1} z dz = \iint_D ds \frac{z^2}{2} \Big|_0^{x^2+y^2+1} = \\ &= \frac{1}{2} \iint_D ds (x^2 + y^2 + 1)^2 = \{ \text{в полярных координатах} \} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (r^2 + 1)^2 r dr = \frac{1}{2 \cdot 2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (r^2 + 1)^2 d(r^2 + 1) = \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{(r^2 + 1)^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3} \right) = \frac{2}{4} \pi \frac{7}{3} = \frac{7}{6} \pi. \end{aligned}$$

Знаменатель:

$$\begin{aligned} \int_V dV &= \iint_D ds \int_0^{x^2+y^2+1} dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (r^2 + 1) r dr = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (r^2 + 1) d(r^2 + 1) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{(r^2 + 1)^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} d\varphi (4 - 1) = \frac{3}{4} \cdot 2\pi = \frac{3}{2} \pi. \end{aligned}$$

$$z_c = \frac{7 \cdot \pi \cdot 2}{6 \cdot 3 \cdot \pi} = \frac{7}{3 \cdot 3} = \frac{7}{9}.$$

Ответ: $x_c = 0$, $y_c = 0$, $z_c = \frac{7}{9}$.

Пример:

Определите координаты центра тяжести верхней половины шара радиусом R с центром в $(0,0,0)$, считая плотность γ_0 постоянной.

Решение:

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}; z = 0; 0 \leq z \leq \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}.$$

$$x_c = y_c = 0, \quad z_c = \frac{\iiint_V z \gamma_0 dx dy dz}{\iiint_V \gamma_0 dx dy dz}.$$

В сферических координатах: $z = \rho \cos \theta$, $dx dy dz = \rho^2 d\rho \sin \theta d\theta d\varphi$.

$$\begin{aligned} m &= \iiint_V \gamma_0 \rho^2 d\rho \sin \theta d\theta d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^R \gamma_0 \rho^2 d\rho \sin \theta = \\ &= 2\pi \gamma_0 \int_0^{\pi/2} d\theta \sin \theta \frac{\rho^3}{3} \Big|_0^R = 2\pi \gamma_0 \frac{R^3}{3} \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta = \frac{2\pi \gamma_0 R^3}{3} (-\cos \theta) \Big|_0^{\pi/2} = \\ &= \frac{2\pi \gamma_0 R^3}{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iiint_V \gamma_0 \rho \cos \theta \rho^2 \sin \theta d\rho d\theta d\varphi &= \gamma_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta \int_0^R \rho^3 d\rho = \\ &= \gamma_0 2\pi \frac{R^4}{4} \int_0^{\pi/2} \sin \theta d(\sin \theta) = \frac{\pi \gamma_0 R^4}{2} \frac{\sin^2 \theta}{2} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi \gamma_0 R^4}{4}. \end{aligned}$$

$$z_c = \frac{\pi \gamma_0 R^4}{4} \frac{3}{2\pi \gamma_0 R^3} = \frac{3}{8} R.$$

Ответ: $x_c=0$, $y_c=0$, $z_c=\frac{3}{8}R$.

В результате изучения материала, изложенного в этих лекциях, студент должен знать следующие понятия и уметь вычислять:

- интегралы по фигуре, их классификацию и свойства;
- двойной интеграл, вычисление двойного интеграла как повторного; замена переменных в двойном интеграле, двойной интеграл в полярных координатах;
- поверхностный интеграл первого рода, способы вычисления;
- тройной интеграл, вычисление тройного интеграла как повторного; способы его вычисления, замена переменных в тройном интеграле; тройной интеграл в цилиндрических координатах; тройной интеграл в сферических координатах;
- криволинейный интеграл первого рода, способы вычисления;
- геометрические и механические приложения интегралов по фигуре: длина, площадь, объем, масса фигуры; центр тяжести, статические моменты, моменты инерции фигуры.

Лекции 5 – 9

ТЕОРИЯ ПОЛЯ (ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ)

Теория поля (или векторный анализ) изучает скалярные и векторные поля, т.е. скалярные и векторные функции точки в пространстве. Хотя объекты теории не связаны с какой-либо системой координат, использование этого инструмента позволяет, исследуя средствами математического анализа функции нескольких переменных (которыми становятся функции точки), определить координатно независимые операции над полями и изучить их свойства. В этом векторный анализ, как раздел векторного исчисления, полностью аналогичен векторной алгебре – хотя операция над векторами может быть сведена к вычислениям, проводимым над координатами векторов, результат от координатной системы не зависит.

Понятие поля позволяет наиболее естественно характеризовать и описывать те свойства реальных объектов, которые не зависят от выбора системы координат: реальные физические свойства не должны быть связаны с какой-либо системой координат.

- 5.1. Скалярное поле
- 5.2. Поверхности и линии уровня
- 5.3. Производная по направлению
- 5.4. Градиент скалярного поля
 - 5.4.1. Оператор Гамильтона (набла)
 - 5.4.2. Связь производной по направлению с градиентом
 - 5.4.3. Свойства градиента
- 5.5. Векторное поле
 - 5.5.1. Векторные линии
 - 5.5.2. Плоское векторное поле
- 6.1. Односторонние и двусторонние поверхности
- 6.2. Площадь поверхности
- 6.3. Система координат и ориентация поверхности
- 6.4. Поверхностный интеграл 1-го рода
- 6.5. Поверхностный интеграл 2-го рода
- 7.1. Поток векторного поля
- 7.2. Свойства потока
- 7.3. Вычисление потока
 - 7.3.1. Проектирование на одну координатную плоскость
 - 7.3.2. Проектирование на три координатные плоскости
- 7.4. Физический смысл потока
- 7.5. Дивергенция векторного поля
 - 7.5.1. Свойства дивергенции
- 7.6. Физический смысл потока через замкнутую поверхность
- 7.7. Теорема Остроградского – Гаусса
- 7.8. Инвариантное определение дивергенции
 - 7.8.1. Физический смысл дивергенции
- 8.1. Линейный интеграл в векторном поле
- 8.2. Свойства линейного интеграла
- 8.3. Вычисление линейного интеграла

- 8.4. Физический смысл линейного интеграла
- 8.5. Ротор (вихрь) векторного поля
 - 8.5.1. Свойства ротора (вихря)
- 8.6. Теорема Стокса
- 8.7. Инвариантное определение ротора
- 8.8. Физический смысл ротора
- 8.9. Формула Грина
- 9.1. Потенциальное векторное поле
 - 9.1.1. Условия потенциальности поля
 - 9.1.2. Вычисление потенциала поля
- 9.2. Соленоидальное поле
 - 9.2.1. Свойства соленоидального поля
- 9.3. Операторы Гамильтона и Лапласа
 - 9.3.1. Оператор Гамильтона (набла)
 - 9.3.2. Оператор Лапласа

5.1. Скалярное поле

О Если с каждой точкой $P(x, y, z)$ некоторой пространственной области G связана скалярная величина, то говорят, что **в области G задано скалярное поле**: $u = f(x, y, z)$, где $f(x, y, z)$ - скалярная функция, называемая **функцией поля**.

Примеры скалярных полей: поле температур, поле давления, поле плотности, поле концентраций, поле электрического потенциала. Рассмотрим подробнее последний пример.

Пусть речь идет о точечном заряде q . Потенциал электростатического поля заряда q , помещенного в начало координат, задается в каждой точке пространства $\vec{r}(x, y, z)$, за исключением начала координат, функцией поля вида:

$$u = \frac{q}{r} = \frac{q}{|\vec{r}|} = \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Заметим, что если $|\vec{r}| = \text{const}$, $x^2 + y^2 + z^2 = \text{const}$ - уравнение сферы. Следовательно, в точках, принадлежащих сфере, потенциал электростатического поля сохраняет свое значение, или $u = \text{const}$.

Ограничимся рассмотрением так называемых стационарных полей, т.е. полей, не зависящих от времени.

5.2. Поверхности и линии уровня

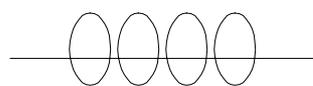
В дальнейшем, если не оговорено особо, предполагаем функцию $u = f(x, y, z)$ однозначной и непрерывно-дифференцируемой.

Рассмотрим точки области, в которой функция $u = f(x, y, z)$ принимает постоянные значения: $f(x, y, z) = c$, ($c = \text{const}$). Это уравнение можно рассматривать как уравнение некоторой поверхности в пространстве.

- О Геометрические места точек $P(x, y, z)$, где скалярное поле принимает одно и то же значение $f(x, y, z) = c$, называются **поверхностями уровня** или эквипотенциальными поверхностями.
- ! В силу однозначности функции $u = f(x, y, z)$ поверхности уровня, соответствующие различным значениям c , не пересекаются между собой.
- О Скалярное поле называется **плоским**, если при подходящем выборе системы координат функция поля зависит только от двух переменных. Множество точек плоскости $P(x, y)$, для которых $f(x, y) = c$, называется **линией уровня** плоского скалярного поля.

Пример:

Поле температур бесконечной равномерно нагретой нити.



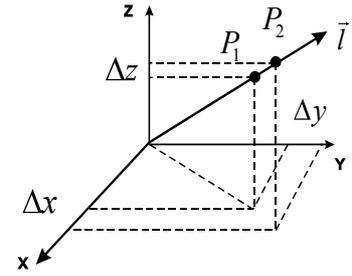
линии уровня – окружности

5.3. Производная по направлению

Пусть в пространственной области G задано скалярное поле: $u = u(x, y, z) = u(P)$. Рассмотрим точку $P_1(x, y, z)$ и исходящий из нее вектор $\vec{l} = \{l_x, l_y, l_z\}$. Найдем, как изменяется поле в направлении вектора \vec{l} . Сместимся из точки $P_1(x, y, z)$ в направлении вектора \vec{l} в точку $P_2(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$. Обозначим за Δl длину вектора $\overline{P_1P_2}$: $\Delta l = |\overline{P_1P_2}|$, тогда $\Delta l = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$. При этом функция поля получит приращение

$$\begin{aligned} \Delta u &= u(P_2) - u(P_1) = u(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - u(x, y, z) = \\ &= du + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y + \varepsilon_3 \Delta z = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \Delta z + \theta(\Delta l), \end{aligned}$$

где $\theta(\Delta l)$ - бесконечно малая более высокого порядка по Δl , $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \rightarrow 0$ при $\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0$, а величина $\frac{\Delta u}{\Delta l} = V_{cp}$ - средняя скорость изменения скалярной функции $u(P)$ в направлении вектора \vec{l} .



$$\frac{\Delta u}{\Delta l} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\Delta x}{\Delta l} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\Delta y}{\Delta l} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\Delta z}{\Delta l} + \varepsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta l} + \varepsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta l} + \varepsilon_3 \frac{\Delta z}{\Delta l}.$$

Перейдем к пределу при $\Delta l \rightarrow 0$, что соответствует стремлению $P_2 \rightarrow P_1$:

$$\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma,$$

где $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ - направляющие косинусы вектора $\overline{P_1 P_2}$. Поскольку $\overline{P_1 P_2} \parallel \vec{l}$, то их направляющие косинусы равны. Так как $\vec{l} = l_x \vec{i} + l_y \vec{j} + l_z \vec{k}$, то $\cos \alpha = \frac{l_x}{|\vec{l}|}$, $\cos \beta = \frac{l_y}{|\vec{l}|}$, $\cos \gamma = \frac{l_z}{|\vec{l}|}$.

О Производной функции u в точке $P(x, y, z)$ (обозначение $\frac{\partial u}{\partial l}$) по направлению вектора \vec{l} называется предел $\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta l}$ (если он существует), рав-

$$\text{ный } \frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma.$$

Производная $\frac{\partial u}{\partial l}$ по направлению \vec{l} определяет скорость изменения ска-

лярного поля в направлении вектора \vec{l} , в частности, если $\frac{\partial u}{\partial l} > 0$, поле возрастает, если $\frac{\partial u}{\partial l} < 0$, поле убывает.

Пример:

Найти производную $\frac{\partial u}{\partial l}$ в точке $P(1, 1, 1)$ в направлении вектора

$$\vec{l} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}, \text{ если } u = x^2 + y^2 + z^2$$

Решение:

$$u'_x|_P = 2x|_P = 2, \quad u'_y|_P = 2y|_P = 2, \quad u'_z|_P = 2z|_P = 2; \quad |\vec{l}| = \sqrt{3},$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}; \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{3}}; \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad \frac{\partial u}{\partial l} = 2 \frac{1}{\sqrt{3}} + 2 \frac{1}{\sqrt{3}} + 2 \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} > 0,$$

следовательно, скалярное поле возрастает.

5.4. Градиент скалярного поля

Пусть задано скалярное поле $u(x, y, z)$.

О Градиентом скалярного поля u в точке $P(x, y, z)$ называется вектор, обозначаемый символом $grad u$ и определяемый равенством

$$grad u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k},$$

5.4.1. Оператор Гамильтона (набла)

Введем символический вектор “набла” или оператор Гамильтона

$$\vec{\nabla} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} = \left(\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

! Знак $\vec{\nabla}$ используется для записи операций векторного анализа в сокращенной и удобной для расчётов форме.

Выражение вида $\vec{\nabla}u(x, y, z)$ понимается как результат действия оператора на соответствующую функцию.

Тогда

$$\vec{\nabla}u(x, y, z) = \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot u(x, y, z) = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k} = u'_x \vec{i} + u'_y \vec{j} + u'_z \vec{k},$$

$$grad u = \vec{\nabla}u.$$

5.4.2. Связь производной по направлению с градиентом

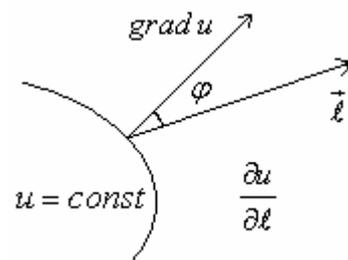
$$\frac{\partial u}{\partial \ell} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma.$$

Пусть $\vec{l}_0 = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ - единичный вектор (орт) в направлении \vec{l} , тогда видно, что

$$\frac{\partial u}{\partial \ell} = (\vec{\nabla}u \cdot \vec{l}_0) = |\vec{\nabla}u| \cdot |\vec{l}_0| \cdot \cos \varphi = |grad u| \cdot \cos \varphi,$$

где φ - угол между единичным вектором \vec{l}_0 данного направления \vec{l} и вектором градиента $grad u$.

Если $grad u = 0$, то $\frac{\partial u}{\partial \ell} = 0$. Если $grad u \neq 0$, то $\frac{\partial u}{\partial \ell} < |grad u|$ для всех векторов \vec{l} , за исключением вектора \vec{l} , направленного в сторону $grad u$.



Вывод: $\frac{\partial u}{\partial l} = |\text{grad } u| \cdot \cos \varphi$. Производная по направлению вектора \vec{l} в точке $P(x, y, z)$ равна проекции градиента на данное направление.

5.4.3. Свойства градиента

Пусть задан градиент поля и производная по направлению:

$$\vec{\nabla}u = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right\}, \quad |\vec{\nabla}u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$

1. Максимальное значение производной по направлению равно модулю градиента: $\frac{\partial u}{\partial l} = |\text{grad } u| \cdot \cos \varphi$; $\varphi \rightarrow 0$; $\cos \varphi \rightarrow 1 \Rightarrow \max \frac{\partial u}{\partial l} = |\text{grad } u|$.
2. Вектор $\vec{\nabla}u$ направлен в сторону возрастания поля.
3. Вектор $\vec{\nabla}u$ всегда нормален к поверхности (линии) уровня поля (эквипотенциальной поверхности).

Доказательство:

Пусть $u = u(x, y, z)$ скалярное поле и $u(x, y, z) = c$ - уравнение поверхности уровня. Выберем $\forall P \in \{u(x, y, z) = c\}$, которую обозначим $P(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, и проведём касательную плоскость к поверхности, описываемой уравнением

$$F(x, y, z) = u(x, y, z) - c = 0;$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x - \bar{x}) + \frac{\partial F}{\partial y}(y - \bar{y}) + \frac{\partial F}{\partial z}(z - \bar{z}) = 0 \text{ - уравнение касательной плоскости;}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x - \bar{x}) + \frac{\partial u}{\partial y}(y - \bar{y}) + \frac{\partial u}{\partial z}(z - \bar{z}) = 0.$$

Тогда вектор нормали касательной плоскости имеет вид:

$$\vec{n} = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right\}, \quad \vec{n} = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k} = \vec{\nabla}u.$$

! Свойства 1-3 дают **инвариантное** (не зависящее от системы координат) определение градиента, т.е. утверждают, что независимо от системы координат $\vec{\nabla}u$ указывает величину и направление наибольшего возрастания скалярного поля в точке: $|\text{grad } u| = \max \left(\frac{\partial u}{\partial l} \right)$.

Дифференциальные свойства градиента:

- Если скалярное поле есть сумма двух полей:
 $f(x, y, z) = u(x, y, z) + v(x, y, z)$, то $\vec{\nabla} f = \vec{\nabla}(u + v) = \vec{\nabla}u + \vec{\nabla}v$.
- $\vec{\nabla}(u \cdot v) = (\vec{\nabla}u)v + u(\vec{\nabla}v)$.
- $\vec{\nabla}c \cdot u = c\vec{\nabla}u$.
- $\vec{\nabla}f(u) = f'_u \cdot \vec{\nabla}u$ - градиент сложной функции.
- $\vec{\nabla}f(u, v) = f'_u \cdot \vec{\nabla}u + f'_v \cdot \vec{\nabla}v$.

Пример:

Найти наибольшую крутизну подъёма поверхности $u = x^y$ в точке $P(2, 2, 4)$.

Решение: $|\text{grad } u| = \max\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right)$.

$$\vec{\nabla} u = u'_x \vec{i} + u'_y \vec{j} + u'_z \vec{k} = yx^{y-1} \vec{i} + x^y \ln x \vec{j} + 0 \vec{k}.$$

$$|\vec{\nabla} u| = \sqrt{(yx^{y-1})^2 + (x^y \ln x)^2} = \sqrt{(2 \cdot 2)^2 + (4 \ln 2)^2} = 4\sqrt{1 + \ln^2 2}.$$

Пример:

Найти нормаль к поверхности $u = x^2 + y^2 + z^2$ в точке $P(1, 1, 1)$.

Решение:

По свойству 3: $\vec{n} \perp \vec{\nabla}u$, $\vec{\nabla}u = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}$,

$$\vec{\nabla} u \Big|_{P(1,1,1)} = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k} \Big|_{P(1,1,1)} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k} = \{2, 2, 2\} \Rightarrow \vec{n}_0 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}.$$

Пример:

Найти градиент функции $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$
(модуль радиус-вектора).

Решение:

P_0 - фиксированная точка, $P(x, y, z)$ - изучаемая точка поверхности.

$$\text{grad } r = \frac{\partial r}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial r}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial r}{\partial z} \vec{k} = \frac{\{x - x_0; y - y_0; z - z_0\}}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}} = \vec{r}_0$$

- единичный вектор, параллельный вектору $\vec{P_0P}$.

Пример:

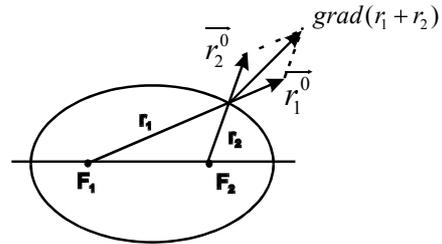
Найти градиент скалярной функции $u(P) = r_1 + r_2$, где r_1, r_2 - расстояния от точки P до фиксированных точек F_1, F_2 . Линии уровня этой функции – эллипсы.

Решение:

Имеем: $\text{grad}(r_1 + r_2) = \vec{r}_1^0 + \vec{r}_2^0$, т.е.

градиент равен диагонали ромба, построенного на ортах радиус-векторов, проведенных к точке P из фокусов F_1 и F_2 . Нормаль к эллипсу в какой-либо точке делит пополам угол между радиус-векторами, проведенными в эту точку.

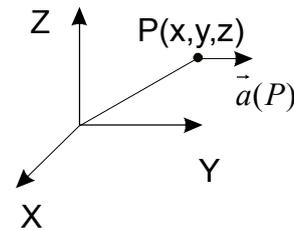
Физическая интерпретация: луч света, вышедший из одного фокуса, попадает в другой фокус.



5.5. Векторное поле

Если с каждой точкой $P(x, y, z)$ пространственной области G связана векторная функция её радиус-вектора $\vec{a} = \vec{a}(P)$, то говорят, что в области G задано векторное поле.

Векторное поле определяется тремя скалярными характеристиками – координатами вектора \vec{a} , $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ или $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$, где $a_x = a_x(x, y, z)$, $a_y = a_y(x, y, z)$, $a_z = a_z(x, y, z)$ - проекции векторного поля на оси координат или компоненты вектор-функции. Будем считать, что они непрерывны и дифференцируемы по всем переменным.



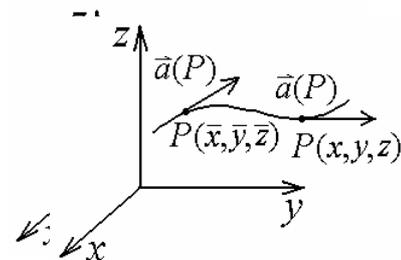
5.5.1. Векторные линии

Векторное поле можно изобразить графически, указав положение вектора \vec{a} в некоторых точках.

О Векторной линией поля $\vec{a} = \vec{a}(P)$ в области G называется кривая, в каждой точке которой вектор \vec{a} направлен по касательной к этой кривой.

Найдём уравнения векторных линий.

Предположим, что векторные линии есть прямые,



тогда их уравнения: $\frac{x - \bar{x}}{a_x} = \frac{y - \bar{y}}{a_y} = \frac{z - \bar{z}}{a_z}$,

$\frac{\Delta x}{a_x} = \frac{\Delta y}{a_y} = \frac{\Delta z}{a_z}$. Так как любую кривую можно на

бесконечно малом участке величины $\vec{dr} = (dx; dy; dz)$ заменить отрезком касательной, а направление касательной совпадает с направлением \vec{a} , то уравнения векторной линии имеют вид:

$$\frac{dx}{a_x} = \frac{dy}{a_y} = \frac{dz}{a_z}.$$

На самом деле речь идет о системе дифференциальных уравнений первого порядка.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_y}{a_x}; \quad \frac{dz}{dx} = \frac{a_z}{a_x}; \quad \frac{dz}{dy} = \frac{a_z}{a_y}.$$

Общее решение этой системы: $\begin{cases} \varphi_1(x, y, z) = C_1; \\ \varphi_2(x, y, z) = C_2, \end{cases}$ оп-

ределяет двухпараметрическое семейство линий и дает совокупность всех векторных линий поля.

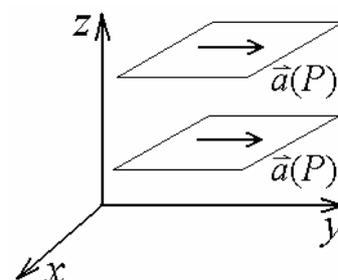
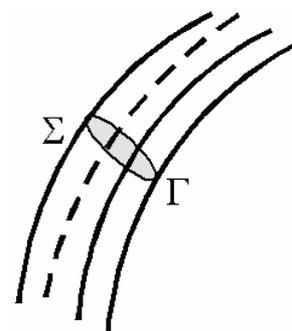
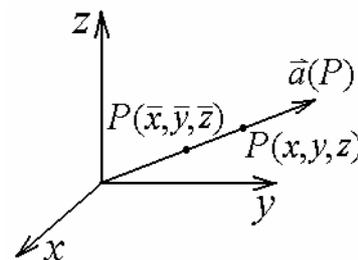
О Векторной трубкой называется совокупность всех векторных линий, пересекающих часть некоторой лежащей в векторном поле поверхности Σ , ограниченной замкнутым контуром Γ .

5.5.2. Плоское векторное поле

О Векторное поле называется плоским, если все векторы лежат в параллельных плоскостях. Уравнение векторных линий

$$\frac{dx}{a_x} = \frac{dy}{a_y} = \frac{dz}{0}.$$

! В плоском поле векторные линии есть плоские кривые $y = \varphi(x)$.



Пример:

Найти векторные линии поля, если поле задано вектором $\vec{a} = -y\vec{i} + x\vec{j} + b\vec{k}$ в точке $P(1,0,0)$

Решение:

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{b}.$$

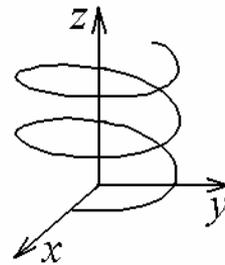
$$1). \frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x}, \quad xdx = -ydy, \quad xdx + ydy = 0;$$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = c_1^2; \quad c_2 = \sqrt{2}c_1; \quad x^2 + y^2 = c_2^2 - \text{уравнение окружности.}$$

$$2). \frac{dy}{x} = \frac{dz}{b}, \quad bdy = xdz, \quad \begin{cases} x = c_2 \cos t, \\ y = c_2 \sin t, \end{cases}$$

$$bc_2 \cos t \, dt = c_2 \cos t \, dz, \quad dz = bdt,$$

$$\begin{cases} z = bt + c_1, \\ x = c_2 \cos t, \\ y = c_2 \sin t. \end{cases}$$



В точке $P(1,0,0)$:

$$\begin{cases} 1 = c_2, \\ 0 = 0, \\ 0 = 0 + c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = 1, \\ c_1 = 0. \end{cases}$$

Уравнение винтовой линии имеет вид: $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \\ z = bt. \end{cases}$

6.1. Односторонние и двусторонние поверхности

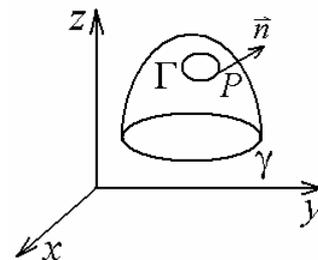
Рассмотрим гладкую и незамкнутую поверхность Σ , ограниченную кусочно-гладким контуром γ . Это означает, что для уравнения поверхности существуют частные производные по всем переменным. В точке P проведём нормаль \vec{n} к поверхности. Через точку P проведём замкнутый контур Γ , не имеющий общих точек с границей γ .

При обходе контура возможны две ситуации:

а) нормаль к поверхности \vec{n} при возвращении в точку P сохранит свое направление;

б) при непрерывном движении вдоль замкнутого контура Γ , непрерывно меняясь по направлению, нормаль изменит направление на противоположное при возвращении в исходную точку.

В случае «а» поверхность называется **двусторонней**, в случае «б» – **односторонней**. Совокупность точек поверхности с определенным направлением нормали \vec{n} называется стороной поверхности.



! Классическим примером односторонней поверхности является лист Мебиуса.

6.2. Площадь поверхности

Пусть Σ - незамкнутая гладкая поверхность. Разобьем ее на участки $\Delta\Sigma_i$, ($i=1, \dots, n$), с помощью сети кривых. Выберем в каждом участке $\Delta\Sigma_i$ точку P_i . Проведем в точке P_i касательную плоскость к поверхности Σ и спроектируем $\Delta\Sigma_i$ на касательную плоскость. На проекции получим плоскую фигуру с площадью $\Delta S'_i$.

О Площадь поверхности S называется предел суммы площадей $\Delta S'_i$ ($i=1, \dots, n$), при условии, что диаметры всех частей разбиения $\Delta\Sigma_i$ стремятся к нулю: $S = \lim_{\Delta\Sigma_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta S'_i$.

! Поверхность, имеющая площадь, называется **квадрируемой**.

Пусть поверхность задается явным уравнением $z = z(x, y)$, где $z(x, y)$ - непрерывно дифференцируемая функция, и однозначно проектируется в плоскую область D_{xy} на координатной плоскости Oxy . Нормаль \vec{n} к поверхности Σ , как вектор, ортогональный к касательной плоскости, имеет компоненты: $\vec{n} = \left\{ \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, -1 \right\}$, и направляющие косинусы нормали \vec{n} равны:

$$\cos(\vec{n}, \vec{i}) = \cos \alpha = \pm \frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}},$$

$$\cos(\vec{n}, \vec{j}) = \cos \beta = \pm \frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}},$$

$$\cos(\vec{n}, \vec{k}) = \cos \gamma = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}.$$

Выбор знака перед радикалом соответствует острому или тупому углу нормали \vec{n} с соответствующей осью координат и определяет сторону поверхности Σ .

Спроектируем элементы $\Delta S'_i$ на касательной плоскости на координатную плоскость Oxy , площадь проекции

$$\Delta S_i = \Delta S'_i \cdot |\cos \gamma| = \frac{\Delta S'_i}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}.$$

Следовательно,

$$\Delta S'_i = \frac{\Delta S_i}{|\cos \gamma|} = \Delta S_i \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2},$$

и предел, фигурирующий в определении площади поверхности S , представляет собой двойной интеграл по области D_{xy}

$$S = \iint_{D_{xy}} \frac{dx dy}{|\cos \gamma|} = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy.$$

Если уравнение поверхности Σ дано в виде $x = x(y, z)$ или $y = y(x, z)$, то площадь может быть представлена как

$$S = \iint_{D_{yz}} \frac{dy dz}{|\cos \alpha|} = \iint_{D_{yz}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2} dy dz$$

или

$$S = \iint_{D_{xz}} \frac{dx dz}{|\cos \beta|} = \iint_{D_{xz}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2} dx dz,$$

где D_{yz} и D_{xz} - проекции поверхности Σ на плоскости Oyz и Oxz .

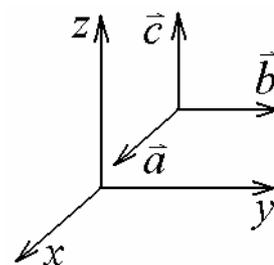
6.3. Система координат и ориентация поверхности

Введем систему координат в пространственной области G . Система векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образует правую тройку, если поворот от \vec{a} к \vec{b} , если наблюдать его из конца вектора \vec{c} , происходит против часовой стрелки, в противном случае тройка называется левой. В дальнейшем будем работать с правой системой координат. В случае незамкнутой поверхности сторону можно определить, определив направление обхода контура.

Выберем определенную сторону незамкнутой двусторонней поверхности, а в ней замкнутый контур Γ . Он ориентирован положительно, если обход совершается против часовой стрелки (+), и ориентирован отрицательно, если обходится по часовой стрелке.

Построим в точке поверхности, лежащей внутри контура, нормаль к поверхности и воспользуемся: «правилом буравчика».

Поверхность является положительно ориентированной, если при обходе контура Γ в положительном направлении движение винта совпадает с направлением нормали. Если движение винта противоположно направлению нормали, то поверхность отрицательно ориентирована.



! Для замкнутой поверхности считается, что внешняя поверхность ориентирована положительно, а внутренняя - отрицательно.

6.4. Поверхностный интеграл 1-го рода

(Рассматривался в разделе «Интегралы по фигуре». Краткие сведения).

Рассмотрим поверхность Σ , в каждой точке которой задана функция: $f(P) = f(x, y, z)$. Если поверхность однозначно проектируется на плоскость Oxy в область D_{xy} и задана уравнением $z = f(x, y)$, то

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} f(x, y, z) d\sigma &= \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \frac{dxdy}{|\cos(\gamma)|} = \\ &= \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy. \end{aligned}$$

6.5. Поверхностный интеграл 2-го рода

Рассмотрим ориентированную поверхность Σ . Спроектируем элемент поверхности $\Delta\Sigma_i$ на координатную плоскость Oxy , обозначив площадь проекции ΔS_i . На каждом элементе поверхности $\Delta\Sigma_i$ выберем произвольную точку $P_i \in \Delta\Sigma_i$, вычислим в ней значение функции и умножим его на площадь проекции. Сложив эти произведения, получим интегральную сумму:

$$\sum_{i=1}^n f(P_i) \cdot \Delta S_i = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta S_i.$$

Конечный предел этой интегральной суммы при стремлении диаметра разбиения к нулю называется поверхностным интегралом 2-го рода от функции $f(x, y, z)$ по определенной стороне поверхности и обозначается:

$$I_{xy} = \pm \iint_{\Sigma} f(P) dx dy = \pm \iint_{\Sigma} f(x, y, z) dx dy.$$

Знак (+) соответствует положительной (внешней), а (–) отрицательной (внутренней) сторонам поверхности.

Если на данной поверхности заданы другие функции $f_1(x, y, z)$, $f_2(x, y, z)$, то проектирование на другие координатные плоскости дает интегралы:

$$I_{yz} = \pm \iint_{\Sigma} f_1(x, y, z) dy dz; \quad I_{xz} = \pm \iint_{\Sigma} f_2(x, y, z) dx dz.$$

Соединение этих интегралов дает общее выражение для поверхностного интеграла второго рода:

$$I = \pm \iint_{\Sigma} f(x, y, z) dx dy + f_1(x, y, z) dy dz + f_2(x, y, z) dx dz.$$

! Между поверхностными интегралами 1-го и 2-го рода существует следующая связь:

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) \cos \gamma d\sigma = \pm \iint_{\Sigma} f(x, y, z) dx dy,$$

причем при интегрировании по положительной стороне поверхности:

$$\cos \gamma > 0; \quad \cos \gamma d\sigma = +dx dy,$$

а по отрицательной:

$$\cos \gamma < 0; \quad \cos \gamma d\sigma = -dx dy.$$

! Поверхностные интегралы 2-го рода обладают всеми свойствами двойных интегралов.

Поверхностный интеграл второго рода может быть записан в более компактном виде. Пусть $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, где $a_x = a_x(x, y, z)$, $a_y = a_y(x, y, z)$, $a_z = a_z(x, y, z)$ - векторное поле. Для координат этого вектора можно составить поверхностный интеграл второго рода, проецируя каждую координату вектора на соответствующую координатную плоскость:

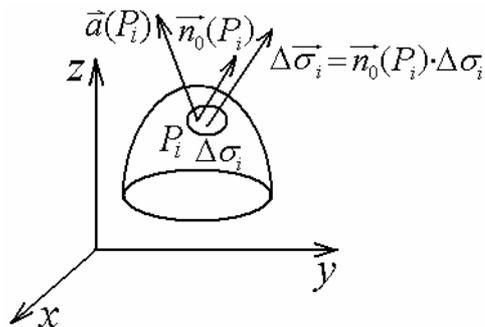
$$I = \iint_{\Sigma} a_x(x, y, z) dydz + a_y(x, y, z) dx dz + a_z(x, y, z) dx dy = \\ = \iint_{\Sigma} (a_x(x, y, z) \cos \alpha + a_y(x, y, z) \cos \beta + a_z(x, y, z) \cos \gamma) d\sigma.$$

Так как \vec{n}_0 - единичный вектор нормали к выбранной стороне поверхности Σ , $\vec{n}_0 = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$, то $I = \iint_{\Sigma} (\vec{a}(x, y, z) \cdot \vec{n}_0) d\sigma$.

Вводя $\vec{d\sigma} = \vec{n}_0 \cdot d\sigma$ - векторный элемент площади поверхности, направленный по нормали \vec{n}_0 и имеющий длину $d\sigma$, получаем $I = \iint_{\Sigma} (\vec{a}(x, y, z) \cdot \vec{d\sigma})$.

7.1. Поток векторного поля

Пусть $\vec{a} = \vec{a}(P)$ - непрерывное векторное поле, а Σ - ориентированная кусочно-гладкая поверхность (имеющая конечное число границ - линий излома). Разобьем поверхность на n частей $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n$, каждая из которых имеет площадь $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$, и выберем точку P_i на каждом из участков Σ_i . В точке P_i построим единичный вектор нормали $\vec{n}_0(P_i)$ к поверхности Σ_i .



Составим вектор $\vec{\Delta\sigma}_i = \vec{n}_0(P_i) \cdot \Delta\sigma_i$ с длиной $\Delta\sigma_i$, направленный по нормали $\vec{n}_0(P_i)$. Вычислим скалярное произведение $(\vec{a}(P_i) \cdot \vec{\Delta\sigma}_i)$, просуммируем по всем участкам $\sum_{i=1}^n (\vec{a}(P_i) \cdot \vec{\Delta\sigma}_i)$ и рассмотрим предел суммы при $\max(\Delta\sigma_i) \rightarrow 0$.

О Если этот предел существует и не зависит от способа разбиения поверхности Σ на участки Σ_i и от выбора точки P_i , то он называется потоком векторного поля $\vec{a} = \vec{a}(P)$ через поверхность Σ .

$$P = \iint_{\Sigma} (\vec{a} \cdot d\vec{\sigma}) = \iint_{\Sigma} \vec{a} d\vec{\sigma} = \lim_{\max(\Delta\sigma) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (\vec{a}(P_i) \cdot \Delta\vec{\sigma}).$$

О Используя введенное ранее понятие поверхностного интеграла второго рода, можно определить поток вектора \vec{a} через поверхность Σ как поверхностный интеграл второго рода от вектора \vec{a} по поверхности Σ .

! Поток вектора \vec{a} - скалярная характеристика векторного поля.

7.2. Свойства потока

1. Поток меняет знак на обратный с изменением ориентации поверхности Σ : $\iint_{\Sigma^+} (\vec{a}, d\vec{\sigma}) = -\iint_{\Sigma^-} (\vec{a}, d\vec{\sigma})$.

2. Свойство аддитивности по отношению к области интегрирования. Если поверхность Σ состоит из нескольких гладких частей: $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n$, то поток векторного поля \vec{a} равен сумме потоков поля \vec{a} через поверхности:

$$\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n: P = \sum_i^n P_i = \sum_i^n \iint_{\Sigma_i} (\vec{a}, d\vec{\sigma})$$

3. Свойство линейности $\iint_{\Sigma} (\alpha \vec{a} + \beta \vec{b}) d\vec{\sigma} = \alpha \iint_{\Sigma} (\vec{a}, d\vec{\sigma}) + \beta \iint_{\Sigma} (\vec{b}, d\vec{\sigma})$,

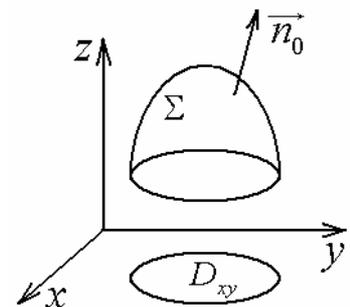
где α и β - некоторые постоянные.

7.3. Вычисление потока

Если ввести $d\vec{\sigma} = \vec{n}_0 d\sigma$ - векторный дифференциальный элемент поверхности, то

$$\begin{aligned} (\vec{a} \cdot d\vec{\sigma}) &= (\vec{a} \cdot \vec{n}_0 d\sigma) = (\vec{a} \cdot \vec{n}_0) d\sigma, \\ \iint_{\Sigma} (\vec{a} \cdot d\vec{\sigma}) &= \iint_{\Sigma} (\vec{a} \cdot \vec{n}_0) d\sigma = \iint_{\Sigma} (Pr_{\vec{n}_0} \vec{a}) d\sigma. \end{aligned}$$

Таким образом, по данной формуле поток сводится к интегралу 1-го рода по поверхности Σ от ска-



лярного произведения вектора $\vec{a}(P)$ на единичную нормаль $\vec{n}_0(P)$ к этой поверхности Σ (иначе: от проекции поля $\vec{a}(P)$ на нормаль $\vec{n}_0(P)$ к поверхности Σ).

7.3.1. Проектирование на одну координатную плоскость

Пусть поверхность Σ задана явно уравнением $z = f(x, y)$ и однозначно проектируется в область D_{xy} на координатной плоскости Oxy .

Тогда
$$\vec{n} = \{f'_x, f'_y, -1\}, \quad \vec{n}_0 = \pm \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} =$$

$$= \pm \left\{ \frac{f'_x}{\sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + 1}}; \frac{f'_y}{\sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + 1}}; -\frac{1}{\sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + 1}} \right\},$$

и поток вектора $\vec{a} = \vec{a}(P) = \vec{a}(x, y, z)$ через эту поверхность равен

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} (\vec{a}, \vec{n}_0) d\sigma &= \iint_{D_{xy}} (\vec{a}, \vec{n}_0) \frac{dxdy}{|\cos(\gamma)|} = \iint_{D_{xy}} (\vec{a}, \vec{n}_0) \sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + 1} \, dxdy = \\ &= \pm \iint_{D_{xy}} (a_x(x, y, f(x, y)) \cdot f'_x + a_y(x, y, f(x, y)) \cdot f'_y - a_z(x, y, f(x, y))) \, dxdy, \end{aligned}$$

т.е. вычисление потока сводится к вычислению двойного интеграла. Знак зависит от направления положительной нормали к поверхности.

! Аналогичные формулы получаются при проектировании на другие координатные плоскости для поверхностей вида $x = f(y, z)$ и $y = f(x, z)$.

7.3.2. Проектирование на три координатные плоскости

Пусть поверхность Σ задана (неявно) уравнением $F(x, y, z) = 0$;

$$\begin{aligned} \vec{n} = \{F'_x, F'_y, F'_z\}, \quad |\vec{n}| = \sqrt{(F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2}, \quad \vec{n}_0 = \pm \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \\ = \pm \left\{ \frac{F'_x}{\sqrt{(F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2}}; \frac{F'_y}{\sqrt{(F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2}}; \frac{F'_z}{\sqrt{(F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2}} \right\}. \end{aligned}$$

Пусть α, β, γ - углы, которые образует нормаль с осями координат. Тогда орт \vec{n}_0 имеет координаты: $\vec{n}_0 = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$.

Так как $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, то $(\vec{a}, \vec{n}_0) = a_x \cos \alpha + a_y \cos \beta + a_z \cos \gamma$

и

$$\iint_{\Sigma} (\vec{a}, \vec{n}_0) d\sigma = \iint_{\Sigma} a_x \cos \alpha d\sigma + \iint_{\Sigma} a_y \cos \beta d\sigma + \iint_{\Sigma} a_z \cos \gamma d\sigma.$$

Рассмотрим отдельные слагаемые: $\iint_{\Sigma} a_z \cos \gamma d\sigma$. Пусть поверхность Σ описывается уравнением $z = z(x, y)$, тогда, т.к. поле $\vec{a}(P)$ в поверхностном интеграле берётся в точке $P \in \Sigma$, то для любой его компоненты координата z выражается через x и y , $a_z(x, y, z) = a_z(x, y, z(x, y))$, $d\sigma = \frac{dxdy}{|\cos \gamma|}$, и

$$\iint_{\Sigma} a_z \cos \gamma d\sigma = \iint_{D_{xy}} a_z(x, y, z(x, y)) \cos \gamma \frac{dxdy}{|\cos \gamma|} = \pm \iint_{D_{xy}} a_z(x, y, z(x, y)) dxdy.$$

Знак (+) соответствует острому углу между нормалью и осью z ($\cos \gamma > 0$), знак (–) – тупому углу между нормалью и осью z ($\cos \gamma < 0$).

Аналогично,

$$\iint_{\Sigma} a_x \cos \alpha d\sigma = \pm \iint_{D_{yz}} a_x(x(y, z), y, z) dydz,$$

$$\iint_{\Sigma} a_y \cos \beta d\sigma = \pm \iint_{D_{xz}} a_y(x, y(x, z), z) dxdz,$$

и окончательно имеем:

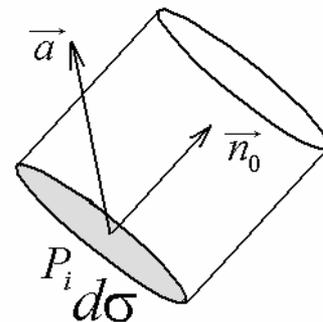
$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} (\vec{a}, d\vec{\sigma}) = & \pm \iint_{D_{yz}} a_x(x(y, z), y, z) dydz \pm \iint_{D_{xz}} a_y(x, y(x, z), z) dxdz \pm \\ & \pm \iint_{D_{xy}} a_z(x, y, z(x, y)) dxdy. \end{aligned}$$

- !** 1). Знаки перед слагаемыми соответствуют знакам направляющих косинусов нормали $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$.
- 2). Вычисление потока векторного поля сводится к вычислению трёх двойных интегралов при условии, что поверхность взаимно однозначно проектируется на все три координатные плоскости. Если это не имеет места, поверхность нужно разбить на однозначно проектирующиеся участки.
- 3). Указанная формула устанавливает связь между потоком и поверхностным интегралом 2-го рода

$$\iint_{\Sigma} (\vec{a}, d\vec{\sigma}) = \pm \iint_{\Sigma} (a_x(x, y, z) dydz + a_y(x, y, z) dxdz + a_z(x, y, z) dxdy).$$

7.4. Физический смысл потока

Пусть $\vec{a}(P)$ - поле скоростей некоторой жидкости, $\vec{a} = \vec{V}$, а Σ - произвольная поверхность в поле, тогда: $(\vec{a}, d\vec{\sigma}) = (\vec{a}, \vec{n}_0) d\sigma = |\vec{V}| \cos \varphi d\sigma = \text{Pr}_{\vec{n}_0} \vec{V} \cdot d\sigma$ - объём столба жидкости с основанием $d\sigma$ и высотой $\text{Pr}_{\vec{n}_0} \vec{V}$, т.е. объём жидкости, протекающей через площадку $d\sigma$ в единицу времени в направлении \vec{n}_0 . Суммируя по поверхности Σ , получаем, что $\iint_{\Sigma} (\vec{a} \cdot d\vec{\sigma})$ - поток жидкости, протекающей через поверхность Σ в единицу времени.



Пример:

Вычислить поток векторного поля радиус-вектора $\vec{a} = \vec{r}(x, y, z)$ через внешнюю сторону цилиндра (H - высота, R - радиус).

Решение:

$$\vec{a}(P) = \vec{r}; \Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$$

следовательно,

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3.$$

$$\Pi_1 = \iint_{\Sigma_1} (\vec{a}, d\vec{\sigma}) = \iint_{\Sigma_1} (\vec{r}, \vec{n}_0) d\sigma = 0.$$

(из рисунка ясно, что проекция \vec{r} на нормаль к Σ_1 равна 0).

$$\Pi_2 = \iint_{\Sigma_2} (\vec{a}, d\vec{\sigma}) = \iint_{\Sigma_2} (\vec{r}, \vec{n}_0) d\sigma = \dots$$

(из рисунка ясно, что проекция \vec{r} на нормаль к Σ_2 , $(\vec{r} \cdot \vec{n}_0) = R$),

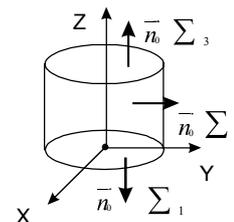
$$\dots = \iint_{\Sigma_2} R d\sigma = R \iint_{\Sigma_2} d\sigma = 2\pi R^2 H.$$

$$\Pi_3 = \iint_{\Sigma_3} (\vec{r}, d\vec{\sigma}) = \iint_{\Sigma_3} (\vec{r}, \vec{n}_0) d\sigma = \dots$$

(из рисунка ясно, что проекция \vec{r} на нормаль к Σ_3 , $(\vec{a} \cdot \vec{n}_0)_{\Sigma_3} = H$),

$$\dots = \iint_{\Sigma_3} H d\sigma = H \iint_{\Sigma_3} d\sigma = \pi R^2 H.$$

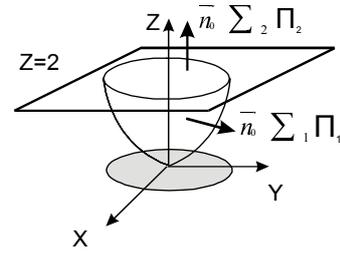
$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 = 3\pi R^2 H.$$



Пример:

Вычислить поток векторного поля
 $\vec{a}(P) = y^2 \vec{j} + z \vec{k}$ через всю поверхность

(нормаль внешняя) $\Sigma: \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 2. \end{cases}$



Решение:

Разобьем поверхность на две части
 $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ и представим поток в виде

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2;$$

$$\Pi_1 = \iint_{\Sigma_1} (\vec{a}, d\vec{\sigma}) = \iint_{\Sigma_1} (\vec{a}, \vec{n}_0) d\sigma, \quad \vec{a}(P) = (0, y^2, z); \quad \vec{n} = (2x, 2y, -1),$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}, \quad \vec{n}_0 = \pm \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \quad (\text{знак выбирается «+», так как } \cos \gamma < 0),$$

$$\vec{n}_0 = \left\{ \frac{2x}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}; \frac{2y}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}; \frac{-1}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} \right\}.$$

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \iint_{\Sigma_1} \frac{2y^3 - z}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} d\sigma = \iint_{D_{xy}} \frac{2y^3 - z}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} dx dy = \\ &= \iint_{D_{xy}} (2y^3 - (x^2 + y^2)) dx dy = \dots \end{aligned}$$

{перейдем в полярную систему координат}

$$\dots = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} \rho d\rho (2\rho^3 \sin^3 \varphi - \rho^2) = \dots = -2\pi.$$

$$\Pi_2 = \iint_{\Sigma_2} (\vec{a}, d\vec{\sigma}) = \iint_{\Sigma_2} (\vec{a}, \vec{n}_0) d\sigma = \dots$$

$$\{ \vec{n}_0 = (0; 0; 1) \Rightarrow (\vec{a}, \vec{n}_0) = z \}$$

$$\dots = \iint_{D_{xy}} z dx dy = 2 \iint_{D_{xy}} dx dy = 2\pi(\sqrt{2})^2 = 4\pi.$$

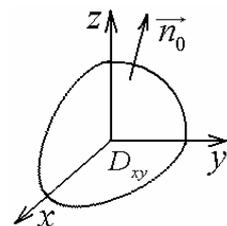
$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 = -2\pi + 4\pi = 2\pi.$$

Пример:

Найти поток вектора $\vec{a} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + xz\vec{k}$ через часть сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, расположенную в первом октанте (нормаль внешняя).

Решение:

$$\Pi = \iint_{\Sigma} a_x dy dz + a_y dx dz + a_z dx dy$$



(компоненты поля и области интегрирования обладают симметрией относительно замены $x \rightarrow y \rightarrow z$ и $D_{yz} \rightarrow D_{xy} \rightarrow D_{xz}$)

$$P = 3 \iint_{D_{xy}} a_z dx dy = 3 \iint_{D_{xy}} x \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy = 3 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 \rho \cos \sqrt{1-\rho^2} \rho d\rho = \frac{3}{16} \pi.$$

Важно отметить, что $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma > 0$, так как сторона поверхности внешняя, и перед всеми интегралами берется знак (+).

7.5. Дивергенция векторного поля

Дивергенция - это дифференциальная и локальная (зависит от точки) количественная характеристика векторного поля. Пусть вектор-функция $\vec{a}(P) = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ имеет непрерывные частные производные первого порядка по всем переменным.

О Дивергенцией векторного поля $\vec{a} = \vec{a}(P)$ в точке $P(x, y, z)$ называется число $div \vec{a} = \frac{\partial a_x(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial a_y(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial a_z(x, y, z)}{\partial z}$, или, опуская аргументы: $div \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$. Используя оператор Гамильтона (набла): $\vec{\nabla} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$, дивергенцию можно записать в виде скалярного произведения $div \vec{a} = (\vec{\nabla}, \vec{a})$.

7.5.1. Свойства дивергенции

1. Линейность $div(\lambda \vec{a} + \mu \vec{b}) = \lambda div \vec{a} + \mu div \vec{b}$, где λ и μ - произвольные постоянные.
2. Пусть $u = u(x, y, z)$ - скалярное поле, тогда $div(u \cdot \vec{a}) = u div \vec{a} + (\vec{a} \cdot \text{gradu})$.
Доказательство:

$$\begin{aligned} div(u \cdot \vec{a}) &= \frac{\partial(u \cdot a_x)}{\partial x} + \frac{\partial(u \cdot a_y)}{\partial y} + \frac{\partial(u \cdot a_z)}{\partial z} = \\ &= \frac{a_x \partial u}{\partial x} + \frac{a_y \partial u}{\partial y} + \frac{a_z \partial u}{\partial z} + u \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) = \vec{a} \cdot \text{gradu} + u \cdot div \vec{a}. \end{aligned}$$

Пример:

$$1). \vec{a} = \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

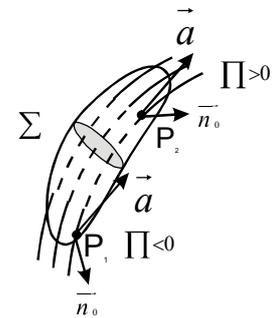
$$div \vec{r} = \frac{\partial}{\partial x} x + \frac{\partial}{\partial y} y + \frac{\partial}{\partial z} z = 1 + 1 + 1 = 3.$$

$$2). \vec{a} = (c_1, c_2, c_3), \quad div \vec{a} = \frac{\partial}{\partial x} c_1 + \frac{\partial}{\partial y} c_2 + \frac{\partial}{\partial z} c_3 = 0.$$

7.6. Физический смысл потока через замкнутую поверхность

Рассмотрим замкнутую поверхность Σ , ограничивающую объем G в векторном поле $\vec{a} = \vec{a}(P)$ скоростей течения несжимаемой жидкости.

Поток вектора $\vec{a} = \vec{a}(P)$ через поверхность Σ , $\Pi = \iint_{\Sigma} (\vec{a}, d\vec{\sigma})$ равен количеству жидкости, протекающей через поверхность Σ в единицу времени. Обозначим единичный вектор внешней нормали \vec{n}_0 . Векторные линии входят и выходят из замкнутой по-



верхности Σ . В точке P_1 угол $(\vec{a}, \vec{n}_0) > \frac{\pi}{2}$; это означает, что жидкость втекает

внутри поверхности. В точке выхода P_2 $(\vec{a}, \vec{n}_0) < \frac{\pi}{2}$, следовательно, жидкость

вытекает. Поток векторного поля \vec{a} через замкнутую поверхность Σ численно равен разности потоков жидкости, втекающей и вытекающей в единицу времени со скоростью \vec{a} в пространственную область G , ограниченную Σ .

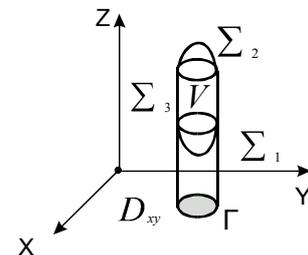
Пусть $\Pi > 0$, следовательно, жидкости вытекает больше, чем втекает, в области G есть **источники** поля.

Если $\Pi < 0$, втекает жидкости больше, чем вытекает, то в G есть **стоки**.

Если $\Pi = 0$, то в области G источников и стоков или нет, или они компенсируют друг друга.

7.7. Теорема Остроградского - Гаусса

Если в некоторой области G трёхмерного пространства, ограниченной замкнутой кусочно-гладкой поверхностью Σ , задано непрерывно дифференцируемое векторное поле $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$, то поток векторного поля \vec{a} через внешнюю сторону замкнутой поверхности Σ равен тройному интегралу от функции $\left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right)$ по области G ,



ограниченной поверхностью Σ :

ограниченной поверхностью Σ :

$$\Pi = \iint_{\Sigma} (\vec{a} \cdot d\vec{\sigma}) = \iiint_G \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) dx dy dz,$$

где символ \iint_{Σ} обозначает интеграл по замкнутой поверхности.

Доказательство:

Часть 1.

Рассмотрим область G , правильную в направлении оси Oz , которую будем называть элементарной H_z областью. Это означает, что снизу и сверху она ограничена поверхностями: $\Sigma_1: z = z_1(x, y)$ и $\Sigma_2: z = z_2(x, y)$ соответственно, а сбоку цилиндрической поверхностью Σ_3 с образующими, параллельными оси Oz , и направляющей Γ .

Рассмотрим одно слагаемое:

$$\begin{aligned} \iiint_G \frac{\partial a_z}{\partial z} dx dy dz &= \iint_{D_{xy}} dx dy \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial a_z}{\partial z} dz = \iint_{D_{xy}} dx dy a_z(x, y, z) \Big|_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} = \\ &= \iint_{D_{xy}} dx dy \{ a_z(x, y, z_2(x, y)) - a_z(x, y, z_1(x, y)) \} = \\ &= \iint_{D_{xy}} a_z(x, y, z_2(x, y)) dx dy - \iint_{D_{xy}} a_z(x, y, z_1(x, y)) dx dy = \dots \\ &\quad \{ \text{на } \Sigma_2 \cos \gamma > 0, \text{ а на } \Sigma_1 \cos \gamma < 0. \end{aligned}$$

Учитывая, что $dx dy = |\cos \gamma| d\sigma$, получаем:

$$\begin{aligned} \text{на } \Sigma_2: dx dy &= \cos \gamma d\sigma, \\ \text{на } \Sigma_1: dx dy &= -\cos \gamma d\sigma \} \dots = \iint_{\Sigma_2} a_z(x, y, z) \cos \gamma d\sigma + \iint_{\Sigma_1} a_z(x, y, z) \cos \gamma d\sigma = \dots \end{aligned}$$

Добавим интеграл по Σ_3 $\iint_{\Sigma_3} a_z(x, y, z) \cos \gamma d\sigma$ в полученную сумму, так как на

Σ_3 $\cos \gamma$ всюду равен нулю, а следовательно, и $\iint_{\Sigma_3} a_z(x, y, z) \cos \gamma d\sigma = 0$.

Тогда

$$\begin{aligned} \dots &= \iint_{\Sigma_2} a_z(x, y, z) \cos \gamma d\sigma + \iint_{\Sigma_1} a_z(x, y, z) \cos \gamma d\sigma + \iint_{\Sigma_3} a_z(x, y, z) \cos \gamma d\sigma = \\ &= \iint_{\Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3} a_z(x, y, z) \cos \gamma d\sigma = \iint_{\Sigma} a_z(x, y, z) \cos \gamma d\sigma. \end{aligned}$$

Часть 2.

Рассмотрим пространственную область G , которую можно разбить на n элементарных областей H_z типа, т.е. $G = \bigcup_{k=1}^n G_k$. Докажем, что и в этом случае справедлива теорема Остроградского-Гаусса.

Пусть $\Sigma_1^{(k)}$, $\Sigma_2^{(k)}$, $\Sigma_3^{(k)}$ - нижняя, верхняя и боковая части поверхности $\Sigma^{(k)}$, ограничивающей область G_k ,

тогда

$$\begin{aligned} \iiint_G \frac{\partial a_z}{\partial z} dx dy dz &= \sum_{k=1}^n \iiint_{G_k} \frac{\partial a_z}{\partial z} dx dy dz = \\ &= \sum_{k=1}^n \left\{ \iint_{\Sigma_1^{(k)}} a_z \cos \gamma d\sigma + \iint_{\Sigma_2^{(k)}} a_z \cos \gamma d\sigma + \iint_{\Sigma_3^{(k)}} a_z \cos \gamma d\sigma \right\} = \iint_{\Sigma} a_z \cos \gamma d\sigma, \end{aligned}$$

так как интегралы по $\Sigma_3^{(k)}$ равны нулю, а по поверхности $\Sigma_1^{(k)}$ и $\Sigma_2^{(k)}$ составляют в сумме интеграл по поверхности $\Sigma^{(k)}$.

Часть 3.

Аналогично для H_x и H_y областей справедливо:

$$\iiint_G \frac{\partial a_y}{\partial y} dx dy dz = \iint_{\Sigma} a_y \cos \beta d\sigma; \quad \iiint_G \frac{\partial a_x}{\partial x} dx dy dz = \iint_{\Sigma} a_x \cos \alpha d\sigma.$$

Складывая почленно, получаем утверждение теоремы.

! 1). Координатная форма записи теоремы Остроградского-Гаусса имеет вид:

$$\iint_{\Sigma} (a_x \cos \alpha + a_y \cos \beta + a_z \cos \gamma) d\sigma = \iiint_G \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) dx dy dz,$$

где $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ - координаты единичного вектора внешней нормали.

2). Используя обозначение дивергенции, формулу Остроградского-Гаусса можно записать в виде:

$$\iint_{\Sigma} (\vec{a} \cdot \vec{n}_0) d\sigma = \iiint_G \operatorname{div} \vec{a} dx dy dz = \iiint_G (\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) dx dy dz.$$

Поток векторного поля (вектора) через внешнюю сторону замкнутой поверхности Σ равен тройному интегралу от $\operatorname{div} \vec{a}$ по пространственной области G , ограниченной поверхностью Σ .

Применение теоремы Остроградского - Гаусса

Пример:

Вычисление объемов.

Пусть $\vec{a}(x, y, z) = \vec{r}$; $\vec{r} = (x, y, z)$; $\text{div}(\vec{a}) = \text{div}(\vec{r}) = 1+1+1=3$.

$$\iiint_G 3 dx dy dz = \iint_{\Sigma} x \cos \alpha d\sigma + y \cos \beta d\sigma + z \cos \gamma d\sigma,$$

$$V = \frac{1}{3} \iint_{\Sigma} (x dy dz + y dx dz + z dx dy).$$

Пример:

Вычисление потоков.

Вычислить поток поля $\vec{a} = x^2 \vec{i} + y^2 \vec{j} + z^2 \vec{k}$ через замкнутую поверхность

$$\Sigma: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \\ z = 0 \quad (z \geq 0). \end{cases}$$

Решение:

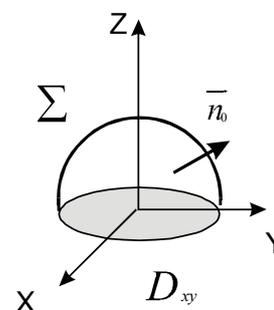
$$\Pi = \iint_{\Sigma} (\vec{a}, d\vec{\sigma}) = \iiint_G \text{div} \vec{a} dx dy dz =$$

$$\iiint_G (2x + 2y + 2z) dx dy dz = \dots$$

{перейдём в сферическую систему координат}

... =

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta \int_0^R r^2 dr (2r \cos \varphi \sin \theta + 2r \sin \varphi \sin \theta + 2r \cos \theta) = \frac{\pi R^4}{2}.$$



Пример:

Найти поток поля $\vec{a} = x^2 \vec{i} + y^2 \vec{j} + z^2 \vec{k}$ через внешнюю сторону полусферы:

$$\Sigma: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \\ z \geq 0. \end{cases}$$

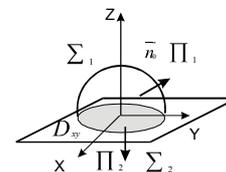
Решение:

Воспользуемся результатами предыдущей задачи. Замкнем поверхность Σ_1 поверхностью Σ_2 , которая представляет собой часть плоскости XOY .

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 = \frac{\pi R^4}{2}, \quad \Pi_1 = \Pi - \Pi_2, \quad \Pi_2 = \iint_{\Sigma_2} (\vec{a}, \vec{n}_0) d\sigma =$$

$$= \dots \{ \vec{a} \cdot \vec{n}_0 = (x^2, y^2, z^2) \cdot (0, 0, -1) = -z^2 \} \dots = - \iint_{\Sigma_2} z^2 d\sigma = 0,$$

$$\text{т.к. на } \Sigma_2 \quad z = 0 \quad \text{и} \quad \Pi_1 = \Pi - \Pi_2 = \frac{\pi R^4}{2}.$$



7.8. Инвариантное определение дивергенции

Пусть $\vec{a} = \vec{a}(P)$ - векторное поле, удовлетворяющее условию теоремы Остроградского – Гаусса. Пусть точка M - произвольная точка области G . Выберем поверхность Σ , охватывающую область G . Из теоремы Остроградского – Гаусса следует, что
$$\iint_{\Sigma} (\vec{a}, \vec{n}_0) d\sigma = \iiint_G \operatorname{div} \vec{a} \, dx dy dz.$$

Воспользуемся теоремой о среднем, согласно которой существует такая точка M_1 , принадлежащая G , что $\operatorname{div} \vec{a} |_{M_1} \cdot V = \iint_{\Sigma} (\vec{a} \cdot d\vec{\sigma})$;

где V – объем G . Пусть Σ стягивается в точку M , тогда $M_1 \rightarrow M$, а $\operatorname{div} \vec{a}(M_1) = \frac{\iint_{\Sigma} (\vec{a} \cdot d\vec{\sigma})}{V}$,

где V – объем G . Пусть Σ стягивается в точку M , тогда $M_1 \rightarrow M$, а $\operatorname{div} \vec{a}(M_1)$

$$\rightarrow \operatorname{div} \vec{a}(M), \operatorname{div} \vec{a}(M) = \lim_{\Sigma \rightarrow M} \frac{\iint_{\Sigma} (\vec{a} \cdot d\vec{\sigma})}{V}.$$

Поскольку правая часть выражения не зависит от системы координат (инвариантна), то инвариантно и данное определение дивергенции.

7.8.1. Физический смысл дивергенции

Поскольку величина $\frac{\iint_{\Sigma} (\vec{a} \cdot d\vec{\sigma})}{V}$ имеет смысл средней плотности потока

в пространственной области G , то $\lim_{\Sigma \rightarrow M} \frac{\iint_{\Sigma} \vec{a} \cdot d\vec{\sigma}}{V} = \operatorname{div} \vec{a}$ есть плотность потока в точке M .

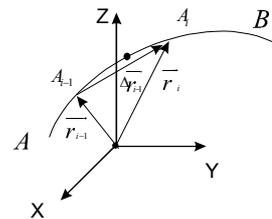
Точки поля, в которых дивергенция положительна, т.е. $\operatorname{div} \vec{a}(M) > 0 \Rightarrow \Pi > 0$, называют **источниками** векторного поля, а точки, в которых дивергенция отрицательна, $\operatorname{div} \vec{a}(M) < 0 \Rightarrow \Pi < 0$ - **стоками** векторного поля.

С Векторные линии векторного поля начинаются в точках поля с положительной дивергенцией, а заканчиваются в точках с отрицательной дивергенцией.

О Величину $|\operatorname{div} \vec{a}(M)|$ называют **мощностью** источника или стока.

8.1. Линейный интеграл в векторном поле

Рассмотрим кусочно-гладкую кривую L и дугу AB (обозначение $\cup AB$) и векторное поле $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, непрерывное на L . Разобьем дугу $\cup AB$ произвольным образом точками A_0, A_1, \dots, A_n на n частей. Обозначим $\Delta\vec{r}_i$ - вектор, стягивающий концы дуги $\cup A_i A_{i-1}$. Выберем точку $P_i \in \cup A_i A_{i-1}$. Найдём скалярное произведение $(\vec{a}(P_i) \cdot \Delta\vec{r}_i)$ и просуммируем по всем участкам дуг



$$S_n = \sum_{i=1}^n (\vec{a}(P_i), \Delta\vec{r}_i). \text{ Вычислим предел } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{\max|\Delta\vec{r}_i| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (\vec{a}(P_i) \cdot \Delta\vec{r}_i).$$

О Если этот предел существует и не зависит от способа разбиения дуги $\cup AB$ на отдельные участки и от выбора точки P_i , то он называется **линейным интегралом вектора \vec{a}** по дуге $\cup AB$ в направлении от A до B . Обозначение: $\int_{\cup AB} (\vec{a}, d\vec{r})$. Координатная форма записи:

$$\int_{\cup AB} (\vec{a}, d\vec{r}) = \int_{\cup AB} a_x dx + a_y dy + a_z dz = \int_{\cup AB} a_x(x, y, z) dx + a_y(x, y, z) dy + a_z(x, y, z) dz,$$

$$\int_{\cup AB} (\vec{a}, d\vec{r}) = \lim_{\max|\Delta\vec{r}_i| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (\vec{a}(P_i) \cdot \Delta\vec{r}_i).$$

! Линейный интеграл иногда называют криволинейным интегралом второго рода.

8.2. Свойства линейного интеграла

1. Свойство линейности:

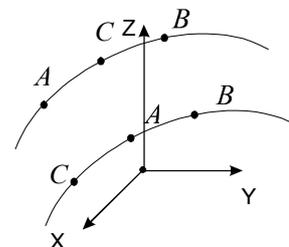
$$\int_{\cup AB} ((\lambda\vec{a} + \mu\vec{b}), d\vec{r}) = \lambda \int_{\cup AB} (\vec{a}, d\vec{r}) + \mu \int_{\cup AB} (\vec{b}, d\vec{r}).$$

2. Свойство аддитивности:

$$\int_{\cup AB} (\vec{a}, d\vec{r}) = \int_{\cup AC} (\vec{a}, d\vec{r}) + \int_{\cup CB} (\vec{a}, d\vec{r}).$$

3. При изменении направления интегрирования

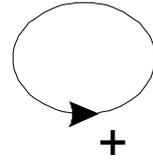
$$\text{линейный интеграл меняет знак: } \int_{\cup AB} (\vec{a}, d\vec{r}) = - \int_{\cup BA} (\vec{a}, d\vec{r}).$$



Свойства 1-3 доказываются из определения.

! Определение криволинейного интеграла остается справедливым, если начальная и конечная точка совпадают.

О Криволинейный интеграл по замкнутому контуру называется **циркуляцией** векторного поля по замкнутому контуру: $C = \oint_L (\vec{a}, d\vec{r})$.



Положительным направлением обхода считается то, при котором область, ограниченная контуром, остается слева.

8.3. Вычисление линейного интеграла

Пусть $\cup AB \in L$ и кривая L задана параметрическими уравнениями:

$$L: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \\ z = z(t) \end{cases}$$

при этом при $t = t_0$ имеем точку $A: \begin{cases} x_0 = x(t_0) \\ y_0 = y(t_0), \\ z_0 = z(t_0) \end{cases}$, при $t = t_1$ $B: \begin{cases} x_1 = x(t_1) \\ y_1 = y(t_1), \\ z_1 = z(t_1) \end{cases}$,

тогда

$$\begin{aligned} \int_{\cup AB} (\vec{a}, d\vec{r}) &= \int_{\cup AB} a_x(x, y, z)dx + a_y(x, y, z)dy + a_z(x, y, z)dz = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \{a_x(x(t), y(t), z(t)) \cdot \dot{x}(t) + a_y(x(t), y(t), z(t))\dot{y}(t) + a_z(x(t), y(t), z(t))\dot{z}(t)\} dt, \end{aligned}$$

где точки над переменными \dot{x} , \dot{y} , \dot{z} означают дифференцирование по переменной t .

Пример:

Дано: $\vec{a} = z\vec{i} + x\vec{j} + y\vec{k}$, $L: \begin{cases} x = R \cos t \\ y = R \sin t, A(t_0=0), B(t_1=2\pi). \\ z = \frac{t}{2\pi} \end{cases}$

Вычислить линейный интеграл по $\cup AB$.

Решение:

$$\begin{aligned} \oint_{\cup AB} (\vec{a}, d\vec{r}) &= \int_{\cup AB} zdx + xdy + ydz = \\ &= \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{t}{2\pi} (-R \sin t) + R \cos t R \cos t + \frac{1}{2\pi} R \sin t \right\} dt = \pi R^2 + R. \end{aligned}$$

8.4. Физический смысл линейного интеграла

Рассмотрим в качестве поля \vec{a} силу \vec{F} , приложенную к материальной точке P и меняющуюся по величине и направлению при изменении местоположения точки P . $A = (\vec{F} \cdot d\vec{r})$ - работа по перемещению материальной точки по участку $d\vec{r}$, тогда $\int_{\cup AB} (\vec{F} \cdot d\vec{r}) = A$ - работа силы \vec{F} по перемещению материальной точки по дуге AB .

8.5. Ротор (вихрь) векторного поля

Пусть вектор-функция $\vec{a} = \vec{a}(P) = (a_x, a_y, a_z)$ является непрерывно дифференцируемой в каждой точке области определения.

Ротором векторного поля (вектора) \vec{a} называется **вектор**, обозначаемый символом $rot \vec{a}$, равный

О

$$rot \vec{a} = \vec{i} \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right).$$

Это выражение удобно записать в виде символического определителя

$$rot \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix},$$

который вычисляется разложением по первой строке (по базисным векторам $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$); произведение частных производных на компоненты вектора понимается как дифференцирование последних, т.е. $\frac{\partial}{\partial z} a_x = \frac{\partial a_x}{\partial z}$ и т.п. С использованием оператора набла $rot \vec{a} = [\vec{\nabla} \times \vec{a}]$.

! Если в некоторой точке поля $rot \vec{a} = 0$, то поле в этой точке называется безвихревым.

Пример:

$$\vec{a} = (x+z)\vec{i} + (y+z)\vec{j} + (x^2+z)\vec{k}.$$

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x+z & y+z & x^2+z \end{vmatrix} = \vec{i} \left(\frac{\partial}{\partial y} (x^2+z) - \frac{\partial}{\partial z} (y+z) \right) -$$

$$-\vec{j} \left(\frac{\partial}{\partial x} (x^2+z) - \frac{\partial}{\partial z} (x+z) \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial}{\partial x} (y+z) - \frac{\partial}{\partial y} (x+z) \right) =$$

$$= -\vec{i} - \vec{j}(2x-1) + 0\vec{k} = \{ -1, 1-2x, 0 \}.$$

8.5.1. Свойства ротора (вихря)

1. Линейность: $\operatorname{rot}(\lambda\vec{a} + \mu\vec{b}) = \lambda \cdot \operatorname{rot} \vec{a} + \mu \cdot \operatorname{rot} \vec{b}$, где λ и μ - некоторые постоянные. Иначе, $[\vec{\nabla} \times (\lambda\vec{a} + \mu\vec{b})] = \lambda[\vec{\nabla} \times \vec{a}] + \mu[\vec{\nabla} \times \vec{b}]$.

2. Пусть $u = u(x, y, z)$ - скалярное поле, тогда $\operatorname{rot}(u \cdot \vec{a}) =$
 $= [\operatorname{grad} u \times \vec{a}] + u \cdot \operatorname{rot} \vec{a}$.

В векторных обозначениях: $[\vec{\nabla} \times (u\vec{a})] = [\vec{\nabla} u \times \vec{a}] + u[\vec{\nabla} \times \vec{a}]$.

Доказательство:

$$[\vec{\nabla} \times (u\vec{a})] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ ua_x & ua_y & ua_z \end{vmatrix} = \vec{i} \left(\frac{\partial}{\partial y} (ua_z) - \frac{\partial}{\partial z} (ua_y) \right) - \vec{j} \left(\frac{\partial}{\partial x} (ua_z) - \frac{\partial}{\partial z} (ua_x) \right) +$$

$$+ \vec{k} \left(\frac{\partial}{\partial x} (ua_y) - \frac{\partial}{\partial y} (ua_x) \right) = u \left\{ \vec{i} \left(\frac{\partial}{\partial y} a_z - \frac{\partial}{\partial z} a_y \right) - \vec{j} \left(\frac{\partial}{\partial x} a_z - \frac{\partial}{\partial z} a_x \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial}{\partial x} a_y - \frac{\partial}{\partial y} a_x \right) \right\} +$$

$$+ \vec{i} \left(\frac{\partial u}{\partial y} a_z - \frac{\partial u}{\partial z} a_y \right) - \vec{j} \left(\frac{\partial u}{\partial x} a_z - \frac{\partial u}{\partial z} a_x \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial u}{\partial x} a_y - \frac{\partial u}{\partial y} a_x \right) = u \cdot \operatorname{rot}(\vec{a}) + [\operatorname{grad} u \times \vec{a}].$$

Пример:

$$\vec{a} = \operatorname{const}, \operatorname{rot}(|\vec{r}|\vec{a}) = [\operatorname{grad} |\vec{r}| \times \vec{a}] + |\vec{r}| \operatorname{rot} \vec{a} = [\operatorname{grad} |\vec{r}| \times \vec{a}] = \left[\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \times \vec{a} \right] = \frac{1}{|\vec{r}|} [\vec{r} \times \vec{a}]$$

8.6. Теорема Стокса

(устанавливает связь между циркуляцией и ротором)

Циркуляция непрерывно дифференцируемого векторного поля $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ по произвольному кусочно-гладкому контуру L вычисляется по формуле

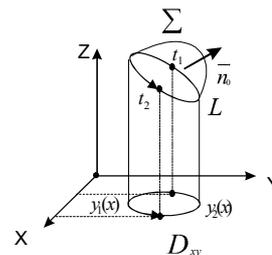
$$\oint_L a_x dx + a_y dy + a_z dz = \iint_{\Sigma} \left\{ \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \cos \gamma \right\} d\sigma.$$

При этом выбор стороны поверхности Σ и направление обхода контура L согласованы (по правилу винта).

Доказательство:

Для доказательства сгруппируем слагаемые в правой части с одинаковыми координатами вектора \vec{a} :

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} (\text{rot} \vec{a} \cdot \vec{d}\sigma) &= \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} \cos \beta - \frac{\partial a_x}{\partial y} \cos \gamma \right) d\sigma + \\ &+ \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} \cos \gamma - \frac{\partial a_y}{\partial z} \cos \alpha \right) d\sigma + \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} \cos \alpha - \frac{\partial a_z}{\partial x} \cos \beta \right) d\sigma. \end{aligned}$$



Рассмотрим первый из интегралов:

$$I_1 = \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} \cos \beta - \frac{\partial a_x}{\partial y} \cos \gamma \right) d\sigma = \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \cos \gamma d\sigma.$$

Пусть поверхность Σ однозначно проецируется на координатную плоскость Oxy , т.е. любая прямая, параллельная оси Oz , пересекает ее не более чем в одной точке; тогда $\Sigma: z = z(x, y)$, $|\vec{n}| = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}$;

$$\vec{n}_0 = \frac{\left\{ \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, -1 \right\}}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}}, \quad \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} = -\frac{\partial z}{\partial y}, \quad \text{так как угол между ортом } \vec{n}_0 \text{ и осью}$$

OZ (\vec{n}_0, OZ) $< \frac{\pi}{2}$; $\cos \gamma d\sigma = dxdy$. Переходя к двойному интегралу по D_{xy} :

$\iint_{\Sigma} \rightarrow \iint_{D_{xy}}$, получим

$$I_1 = \iint_{D_{xy}} \left[- \left(\frac{\partial a_x(x, y, z)}{\partial z} \right) \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial a_x(x, y, z)}{\partial y} \right] dxdy.$$

По формуле дифференцирования сложной функции, записывая полную производную сложной функции, имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_x(x, y, z(x, y))}{\partial y} &= \frac{\partial a_x(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial a_x(x, y, z)}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}, \\ - \iint_{D_{xy}} \frac{\partial a_x}{\partial y}(x, y, z(x, y)) dxdy &= - \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial a_x}{\partial y}(x, y, z(x, y)) dy = \\ &= - \int_a^b a_x(x, y_2(x), z(x, y_2(x))) dx + \int_a^b a_x(x, y_1(x), z(x, y_1(x))) dx = \\ &= \int_L a_x(x, y, z) dx. \end{aligned}$$

Докажем последнее преобразование.

$$\begin{aligned} \int_L a_x(x, y, z) dx &= \int_{L_1} a_x(x, y, z) dx + \int_{L_2} a_x(x, y, z) dx = \dots \\ &\quad \{ \text{ пусть } L \text{ задана параметрически} \} \dots \\ &= \int_{t_1}^{t_2} a_x(x(t), y(t), z(t)) \cdot \dot{x}(t)_t dt + \int_{t_2}^{t_1} a_x(x(t), y(t), z(t)) \cdot \dot{x}(t)_t dt = \\ &\quad \dots \{ t = x; \dot{x}(t)_t = 1 \} \dots = \\ &= \int_a^b a_x(x, y_1(x), z(y_1(x))) dx + \int_b^a a_x(x, y_2(x), z(y_2(x))) dx. \end{aligned}$$

Остальные два слагаемых рассматриваются аналогично. Почленное суммирование этих выражений приводит к формуле Стокса.

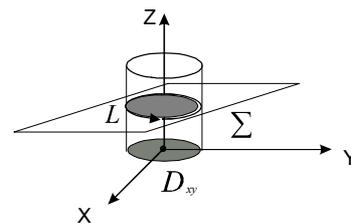
! 1). Используя обозначение ротора, формулу Стокса можно переписать в векторном виде: $\int_L (\vec{a}, d\vec{r}) = \iint_{\Sigma} (\text{rot } \vec{a} \cdot d\vec{\sigma})$. Поток вектора $\text{rot } \vec{a}$ через ориентированную поверхность Σ равен циркуляции поля \vec{a} по контуру L , ориентированному в соответствии с ориентацией Σ .

2). Для того чтобы криволинейный интеграл по любому кусочно-гладкому контуру равнялся нулю, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия Стокса: $\frac{\partial a_z}{\partial y} = \frac{\partial a_y}{\partial z}$; $\frac{\partial a_x}{\partial z} = \frac{\partial a_z}{\partial x}$; $\frac{\partial a_y}{\partial x} = \frac{\partial a_x}{\partial y}$.

Пример:

Вычислить циркуляцию вектора
 $\vec{a} = y\vec{i} + x^2\vec{j} - z\vec{k}$ по контуру L:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4; \\ z = 3; \end{cases}, \begin{cases} x = 2 \cos t; \\ y = 2 \sin t; \\ z = 3. \end{cases}$$



Решение:

1) Вычислим циркуляцию вектора непосредственно:

$$\begin{aligned} C &= \oint_L y dx + x^2 dy - z dz = \int_0^{2\pi} dt \{ 2 \sin t \cdot 2(-\sin t) + 4 \cos^2 t \cdot 2 \cos t - 3 \cdot 0 \} = \\ &= -4 \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt + 8 \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt \sin t = -4 \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt + 8 \int_0^{2\pi} (1 - \sin^2 t) dt \sin t = \\ &= -\frac{1}{2} 4t \Big|_0^{2\pi} + \sin 2t \Big|_0^{2\pi} + 8 \sin t \Big|_0^{2\pi} - 8 \frac{\sin^3 t}{3} \Big|_0^{2\pi} = -4\pi; \end{aligned}$$

2) Вычислим циркуляцию вектора по теореме Стокса:

$$\begin{aligned} C &= \iint_{\Sigma} (\text{rot } \vec{a} \cdot d\vec{\sigma}) = \iint_{\Sigma} (\text{rot } \vec{a} \cdot \vec{n}_0) d\sigma = \iint_{\Sigma} (\text{rot } \vec{a} \cdot (0, 0, 1)) d\sigma = \\ &= \iint_{\Sigma} (\text{rot } \vec{a})_z d\sigma = \iint_{\Sigma} (-1 + 2x) d\sigma = \dots \\ \text{rot } \vec{a} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & x^2 & -z \end{vmatrix} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + (-1 + 2x)\vec{k} = \iint_{D_{xy}} (2x - 1) dx dy = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 (2\rho \cos \varphi - 1) \rho d\rho = \int_0^{2\pi} \rho d\rho \int_0^{2\pi} (2\rho \cos \varphi - 1) d\varphi = \int_0^2 \rho d\rho \{ 2\rho \sin \varphi \Big|_0^{2\pi} - 2\pi \} = \\ &= -2\pi \frac{\rho^2}{2} \Big|_0^2 = -\frac{2\pi}{2} \cdot 4 = -4\pi. \end{aligned}$$

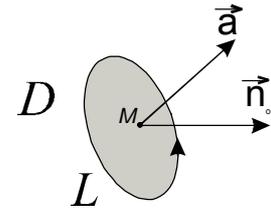
8.7. Инвариантное определение ротора

Ранее было дано определение ротора $\text{rot } \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$, справедливое

лишь в декартовой системе координат.

Теорема Стокса позволяет дать инвариантное (независящее от системы координат) определение ротора векторного поля.

Пусть $\vec{a} = \vec{a}(P)$ - векторное поле, удовлетворяющее теореме Стокса; \vec{n}_0 - некоторое фиксированное направление, проходящее через точку M ; D - плоская область величины S_D , охватывающая точку M , а L - граница области D . Направления обхода контура L и ориентация области D согласованы в соответствии с теоремой Стокса:



$$\oint_L (\vec{a} \cdot d\vec{r}) = \iint_{\Sigma} (\text{rot } \vec{a} \cdot d\vec{\sigma}) \quad \text{или} \quad \iint_{\Sigma} (\text{rot } \vec{a} \cdot d\vec{\sigma}) = \iint_D \text{Pr}_{\vec{n}_0} \text{rot } \vec{a} \, d\sigma.$$

По теореме о среднем существует точка M_1 : $\text{Pr}_{\vec{n}_0} \text{rot } \vec{a}(M_1) \cdot S_D = \oint_L (\vec{a} \cdot d\vec{r})$.

$$\oint_L (\vec{a} \cdot d\vec{r})$$

Тогда $\text{Pr}_{\vec{n}_0} \text{rot } \vec{a}(M_1) = \frac{\oint_L (\vec{a} \cdot d\vec{r})}{S_D}$. Будем стягивать контур L в точку M , тогда

$$\oint_L (\vec{a}, d\vec{r})$$

$$\oint_L (\vec{a}, d\vec{r})$$

точка $M_1 \rightarrow M$ и $\text{Pr}_{\vec{n}_0} \text{rot } \vec{a}(M) = \lim_{L \rightarrow M} \frac{\oint_L (\vec{a}, d\vec{r})}{S_D}$. Поскольку $\frac{\oint_L (\vec{a}, d\vec{r})}{S_D}$ - средняя

поверхностная плотность циркуляции поля по площади S_D , то проекция $\text{rot}(\vec{a})$ на направление \vec{n}_0 не зависит от выбора систем координат и равна поверхностной плотности циркуляции вектора \vec{a} по контуру L , который стягивает площадку, перпендикулярную этому направлению.

8.8. Физический смысл ротора

Пусть вектор $\vec{a} = \vec{V}(P)$ задает поле линейных скоростей жидкости, движущейся вокруг оси Oz , и в точке P угловая скорость вращения $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$.

Тогда

$$\vec{V}(P) = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\omega y \vec{i} + \omega x \vec{j},$$

вычислим

$$\text{rot } \vec{V}(P) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + (\omega + \omega) \vec{k} = 2\omega \vec{k}.$$

Итак, ротор поля линейных скоростей равен удвоенной угловой скорости вращения $\vec{\omega}$ бесконечно малого объема, окружающего точку P , в предпо-

ложении, что в рассматриваемый момент времени этот объем жидкости внезапно отвердел. Это объясняет название «вихрь» вектора, так как в обычном представлении вихрь связан с интенсивностью вращения движущихся частиц жидкости (турбулентность, водоворот).

8.9. Формула Грина

Пусть в односвязной плоской области D , имеющей границу L , задано непрерывно дифференцируемое векторное поле $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$, тогда

$$\oint_L (a_x dx + a_y dy) = \iint_D \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) dx dy, \text{ при этом контур обходится так, чтобы}$$

область D оставалась слева.

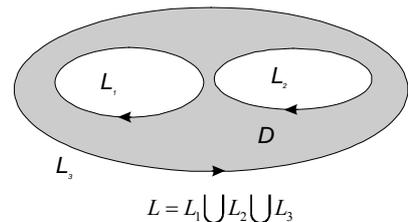
Доказательство:

Рассмотрим формулу Стокса для данного случая: $\oint_L (\vec{a} \cdot d\vec{r}) = \iint_\Sigma (\text{rot} \vec{a} \cdot d\vec{\sigma})$.

$$\Sigma \rightarrow D : |\cos(\gamma)| = 1, dx dy = |\cos(\gamma)| d\sigma; \text{rot} \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & 0 \end{vmatrix};$$

$$\text{откуда следует } \iint_D (\text{rot} \vec{a})_z dx dy = \iint_D \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) dx dy.$$

Область D может быть и не односвязной. В этом случае под линейным интегралом понимается сумма интегралов по всем компонентам границы D .



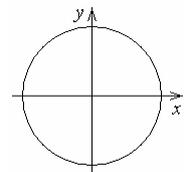
! В некоторых случаях формула Грина позволяет упростить вычисление циркуляции векторного поля.

Пример:

Вычислить циркуляцию вектора

$$\vec{a} = \sqrt{1+x^2+y^2} \vec{i} + y[xy + \ln(x + \sqrt{1+x^2+y^2})] \vec{j}$$

по контуру $L: x^2 + y^2 = R^2$.



$$\text{Тогда: } C = \oint_L \left[\sqrt{1+x^2+y^2} dx + y \left[xy + \ln \left(x + \sqrt{1+x^2+y^2} \right) \right] dy \right]$$

Проще вычислить циркуляцию по формуле Грина:

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_x}{\partial y} &= \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}, \quad \frac{\partial a_y}{\partial x} = y^2 + \frac{y \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \right)}{x + \sqrt{1+x^2+y^2}} = \\ &= y^2 + y \frac{(\sqrt{1+x^2+y^2} + x)}{\sqrt{1+x^2+y^2} (x + \sqrt{1+x^2+y^2})} = y^2 + \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}. \\ C &= \oint_L (\vec{a} \cdot d\vec{r}) = \iint_{D_{xy}} \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) dx dy = \iint_{D_{xy}} \left(y^2 + \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}} - \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \right) dx dy = \\ &= \iint_{D_{xy}} y^2 dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho d\rho (\rho^2 \sin^2 \varphi) = \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} d\varphi \int_0^R \rho^3 d\rho = \\ &= \frac{R^4}{4} \cdot \left\{ \frac{1}{2} \varphi \Big|_0^{2\pi} - \left(\frac{\sin 2\varphi}{4} \right) \Big|_0^{2\pi} \right\} = \frac{R^4}{4} \cdot \frac{1}{2} 2\pi = \frac{\pi R^4}{4}. \end{aligned}$$

9.1. Потенциальное векторное поле

О Векторное поле \vec{a} называется **потенциальным**, если оно является градиентом некоторого скалярного поля (функции) $u = u(P)$, т.е. $\vec{a} = \text{grad}(u)$. Это векторное равенство равносильно трем скалярным: $a_x(x, y, z) = \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x}$; $a_y = \frac{\partial u}{\partial y}$; $a_z = \frac{\partial u}{\partial z}$. Иначе: $du = a_x dx + a_y dy + a_z dz$.

Функция u в этом случае называется **силовой функцией**, или **потенциалом** поля.

! Потенциал u определяется с точностью до постоянного слагаемого.

Пример:

Показать, что поле $\vec{a} = \frac{e}{r^3} \vec{r}$ потенциально.

Решение:

Рассмотрим функцию $u = -\frac{e}{r}$;

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -e \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) = e \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = e \frac{1}{r^2} \left(\frac{2x}{2 \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) = e \frac{x}{r^3};$$

$\frac{\partial u}{\partial y} = e \frac{y}{r^3}$; $\frac{\partial u}{\partial z} = e \frac{z}{r^3} \Rightarrow \text{grad}(u) = +\frac{e}{r^3} \vec{r}$; $\vec{a} = \text{grad}(u) \Rightarrow u$ - потенциал поля \vec{a} .

9.1.1. Условия потенциальности поля

1. Циркуляция векторного поля по любому замкнутому контуру, лежащему в области непрерывности потенциального поля, равна нулю.

Доказательство:

Рассмотрим

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\operatorname{grad}(u)) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} \right) \cdot \vec{i} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} \right) \vec{j} + \\ &+ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \right) \cdot \vec{k} = 0 \Rightarrow \operatorname{rot} \vec{a} = 0. \end{aligned}$$

По теореме Стокса $\oint_L (\vec{a} \cdot d\vec{r}) = \iint_{\Sigma} (\operatorname{rot} \vec{a} \cdot \vec{d}\sigma) = 0$.

2. Линейный интеграл в потенциальном поле не зависит от пути интегрирования и равен разности потенциалов поля в конечной и начальной точках интегрирования.

Доказательство:

Так как поле потенциально: $\vec{a} = \operatorname{grad}(u) = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}$

$$\begin{aligned} \int_{\cup AB} (\vec{a}, d\vec{r}) &= \int_{\cup AB} a_x dx + a_y dy + a_z dz = \int_{\cup AB} \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \right) = \\ &= \int_{t_A}^{t_B} dt \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \dot{x}(t) + \frac{\partial u}{\partial y} \dot{y}(t) + \frac{\partial u}{\partial z} \dot{z}(t) \right\} = \int_{t_A}^{t_B} \frac{du}{dt} dt = \int_{t_A}^{t_B} du = u(x(t), y(t), z(t)) \Big|_{t_A}^{t_B} = \\ &= u(x(t_B), y(t_B), z(t_B)) - u(x(t_A), y(t_A), z(t_A)) = u(B) - u(A). \end{aligned}$$

Т (Условие 3) Для того чтобы векторное поле $\vec{a} = \vec{a}(P)$ в некоторой односвязной области G было потенциальным, необходимо и достаточно, чтобы оно было безвихревым, т.е. $\operatorname{rot}(\vec{a}) = 0$.

Доказательство:

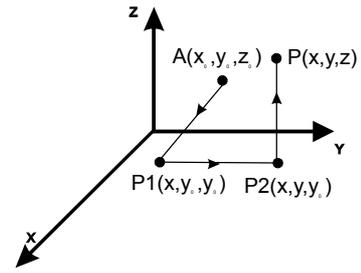
Необходимость.

Пусть $\vec{a} = \vec{a}(P)$ - потенциальное поле $\Rightarrow \vec{a} = \operatorname{grad}(u)$

$\Rightarrow \operatorname{rot} \vec{a} = \operatorname{rot}(\operatorname{grad}(u)) = 0$.

Достаточность.

В силу свойства 2, если зафиксировать начальную точку $A(0,0,0)$, криволинейный интеграл станет некоторой функцией переменной точки $P(x,y,z)$: $u(P) = \int_{\cup AP} (\vec{a}, d\vec{r})$.



Вычислим производную по направлению функции $u(P)$ в точке A . При переходе от точки P к точке P' функция u получит приращение $\Delta u = \int_{\cup PP'} (\vec{a}, d\vec{r}) = \int_{\cup PP'} \text{Pr}_{PP'} \vec{a} dl = \text{Pr}_{PP'} \vec{a}(P_1) \cdot \Delta l$, где $P_1 \in PP'$ по

теореме о среднем. Следовательно, $\frac{\Delta u}{\Delta l} = \text{Pr}_{PP'} \vec{a}(P_1)$. Переходя к пределу

при $P \rightarrow A$ и $\Delta l \rightarrow 0$, имеем $\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta l} = \frac{\partial u}{\partial l} = \text{Pr}_{AP} \vec{a}(A)$. Поскольку производная поля $\frac{\partial u}{\partial l}$ по направлению AP равняется проекции $\text{grad}(u)$ на это

направление, то $\Rightarrow \vec{a} = \text{grad}(u)$.

! Условие 3 часто используют в качестве критерия потенциальности векторного поля.

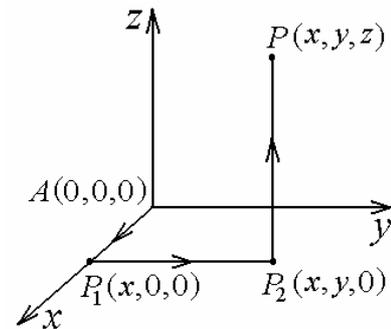
9.1.2. Вычисление потенциала поля

Потенциал векторного поля по условию 2 может быть найден по формуле

$$u = \int_{\cup AP} a_x dx + a_y dy + a_z dz, \text{ где } A(x_0, y_0, z_0) - \text{фиксированная точка поля, координаты которой удовлетворяют условиям существования полей } \vec{a} \text{ и } \text{rot } \vec{a} \text{ (как правило, } A(0,0,0)), \text{ а } P(x,y,z) - \text{текущая точка поля).}$$

Линейный интеграл вычисляется по любому контуру дуги $L: \cup AP$. Наиболее удобен для вычисления контур в виде ломаной, звенья которой параллельны осям координат.

В этом случае



$$u(x, y, z) = \int_{x_0}^x a_x(x, y_0, z_0) dx + \int_{y_0}^y a_y(x, y, z_0) dy + \int_{z_0}^z a_z(x, y, z) dz.$$

Пример:

Доказать, что поле $\vec{a} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ является потенциальным, и найти его потенциал.

Решение: Используя критерий потенциальности поля (условие 3), имеем: $rot(\vec{a}) = 0 \Rightarrow \vec{a}$ - потенциальное поле.

$$u = \int_{\cup AB} (\vec{a} \cdot d\vec{r}) = \int_{\cup AB} x^2 dx + y^2 dy + z^2 dz = \int_{\cup AP_1} \dots + \int_{\cup P_1P_2} \dots + \int_{\cup P_2P} \dots$$

$$\cup AP_1: y = 0 \Rightarrow dy = 0; z = 0 \Rightarrow dz = 0;$$

$$\cup P_1P_2: x = \text{const} \Rightarrow dx = 0; z = 0;$$

$$\cup P_2P: x = \text{const} \Rightarrow dx = 0; y = \text{const} \Rightarrow dy = 0$$

$$u = \int_0^x x^2 dx + \int_0^y y^2 dy + \int_0^z z^2 dz = \frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} + c$$

Проверка: $grad u = grad\left(\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3}\right) = \frac{3x^2}{3}\vec{i} + \frac{3y^2}{3}\vec{j} + \frac{3z^2}{3}\vec{k} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$.

9.2. Соленоидальное поле

О Векторное поле $\vec{a} = \vec{a}(P)$ называется соленоидальным (трубчатым), если в каждой точке P заданного поля $div(\vec{a}) = 0$.

9.2.1. Свойства соленоидального поля

1. Соленоидальные поля не имеют источников и стоков, что следует из определения.
2. Поток \vec{a} через любую замкнутую ориентированную кусочно-гладкую поверхность, лежащую в поле равен нулю:

$$\Pi = \oiint_{\Sigma} (\vec{a} \cdot d\vec{\sigma}) = \iiint_G div \vec{a} dV = 0.$$

3. В соленоидальном поле векторные линии не могут начинаться или кончаться во внутренней точке области; они либо замкнуты, либо начинаются и кончаются на границе поля.
4. Поток векторного поля через поперечное сечение векторной трубки в соленоидальном поле остаётся постоянным вдоль всей трубки.

Доказательство свойства 4:

Рассмотрим область специального вида - векторную трубку T ограниченную двумя поперечными сечениями Σ_1 , Σ_2 и боковой поверхностью Σ_3 .

Вычислим поток через указанную поверхность.

$$\Pi = \Pi_{\Sigma_1} + \Pi_{\Sigma_2} + \Pi_{\Sigma_3} = \iiint_T \operatorname{div} \vec{a} dV = 0$$

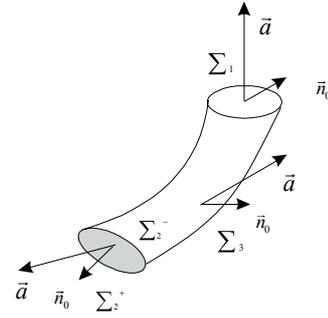
(по свойству 2);

$\Pi_{\Sigma_3} = \Pi_{\text{боковой поверхности}} = \iint_{\Sigma_3} (\vec{a} \cdot d\vec{\sigma}) = \iint_{\Sigma_3} (\vec{a} \cdot \vec{n}_0) d\sigma = 0$, так как на поверхности векторной трубки Σ_3 вектор \vec{a} направлен по касательной к поверхности, т.е. $(\vec{a} \perp \vec{n}_0)_{\Sigma_3} \Rightarrow (\vec{a} \cdot \vec{n}_0)_{\Sigma_3} = 0$.

Таким образом,

$$\Pi_{\Sigma_1} + \Pi_{\Sigma_2} = 0, \Rightarrow \Pi_{\Sigma_1} = -\Pi_{\Sigma_2}, \iint_{\Sigma_1} (\vec{a}, d\vec{\sigma}) = -\iint_{\Sigma_{2+}} (\vec{a}, d\vec{\sigma}) = \iint_{\Sigma_{2-}} (\vec{a}, d\vec{\sigma}).$$

Если придать векторному полю смысл скорости течения жидкости, то количество жидкости, вытекающей из поперечного сечения векторной трубки, всегда равняется количеству жидкости, втекающей в нее.



Пример:

1). Является ли соленоидальным поле:

$$\vec{a} = y^2 \vec{i} - (x^2 + y^2) \vec{j} + z(3y^2 + 1) \vec{k} ?$$

Решение:

$$\operatorname{div} \vec{a} = -2y + 3y^2 + 1 \neq 0 \Rightarrow \vec{a} \text{ - не соленоидально.}$$

2). При каком условии векторное поле $\vec{a} = \varphi(r) \cdot \vec{r}$ будет соленоидальным?

Решение:

$$\operatorname{div} \vec{a} = \operatorname{div}[\varphi(r) \vec{r}] = \varphi(r) \operatorname{div} \vec{r} + (\operatorname{grad} \varphi(r) \cdot \vec{r}) = 3\varphi(r) + \varphi'(r) \left(\frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{r} \right) =$$

$$3\varphi(r) + \frac{\varphi'(r)}{r} r^2 = 3\varphi(r) + \varphi'(r) r$$

$$\text{или } 3\varphi(r) = -r\varphi'(r), \quad r\varphi'(r) = -3\varphi(r), \quad \frac{d\varphi}{\varphi} = -3 \frac{dr}{r},$$

$$\ln \varphi = \ln c - 3 \ln r; \quad \varphi = \frac{c}{r^3} \text{ - поле соленоидально, если } \varphi = \frac{c}{r^3}.$$

9.3. Операторы Гамильтона и Лапласа

9.3.1. Оператор Гамильтона (набла)

Многие операции векторного анализа могут быть записаны в сокращенной и удобной для расчётов форме с помощью символического оператора Гамильтона «набла»:

$$\vec{\nabla} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z} \right\}.$$

Выражение вида $\vec{\nabla}u(x, y, z)$ понимается как результат действия оператора на соответствующую функцию. Тогда

$$\vec{\nabla}u(x, y, z) = \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot u(x, y, z) = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k} = u'_x \vec{i} + u'_y \vec{j} + u'_z \vec{k}, \quad \text{gradu} = \vec{\nabla}u.$$

В этом операторе соединены дифференциальные и векторные свойства, поэтому при действиях с ним необходимо пользоваться правилами векторной алгебры и дифференцирования.

Выполняя действия с оператором «набла», удобно использовать так называемый **символический метод**, основанный на применении следующих правил:

1. Если оператор $\vec{\nabla}$ действует на какое-либо произведение, то вначале используются его дифференциальные, а затем векторные свойства.
2. Чтобы отметить тот факт, что «набла» не воздействует на какую-либо величину, входящую в состав сложной формулы, эту величину помечают индексом c (const).
3. Все величины, на которые оператор «набла» не действует, в окончательном варианте ставятся впереди него.

Пример:

Используя символический метод, вычислить $\text{div}[\vec{a} \times \vec{b}]$.

Решение:

Воспользуемся свойствами смешанного произведения:

$$\begin{aligned} \text{div}[\vec{a} \times \vec{b}] &= (\vec{\nabla} \cdot [\vec{a} \times \vec{b}]) = (\vec{\nabla} \cdot [\vec{a} \times \vec{b}_c]) + (\vec{\nabla} \cdot [\vec{a}_c \times \vec{b}]) = (\vec{b} \cdot [\vec{\nabla} \times \vec{a}]) - (\vec{a} \cdot [\vec{\nabla} \times \vec{b}]) = \\ &= \vec{b} \cdot \text{rot}(\vec{a}) - \vec{a} \cdot \text{rot}(\vec{b}). \end{aligned}$$

9.3.2. Оператор Лапласа

Дифференциальные операции второго порядка возникают в результате двукратного применения к полям оператора «набла».

Если в области G задано скалярное поле $u = u(P)$, то операция взятия градиента порождает векторное поле: $grad(u)$. В векторном поле $\vec{\nabla}u = grad(u)$ операция взятия дивергенции порождает скалярное поле: $(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}u) = div(grad(u))$, а операция взятия ротора - векторное поле $[\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}u] = rot(grad(u))$.

Если в области G задано векторное поле $\vec{a} = \vec{a}(P)$, то операция взятия дивергенции порождает скалярное поле: $div(\vec{a}) = (\vec{\nabla} \cdot \vec{a})$. В скалярном поле $div(\vec{a}) = (\vec{\nabla} \cdot \vec{a})$ операция взятия градиента порождает векторное поле: $\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) = grad(div(\vec{a}))$.

Если в области G задано векторное поле $\vec{a} = \vec{a}(P)$, то операция взятия ротора порождает векторное поле $rot(\vec{a})$. Применяя повторно к этому полю оператор $\vec{\nabla}$, получим скалярное поле $div(rot(\vec{a})) = (\vec{\nabla} \cdot [\vec{\nabla} \times \vec{a}])$ и векторное поле $rot(rot(\vec{a})) = [\vec{\nabla} \times [\vec{\nabla} \times \vec{a}]]$.

При помощи оператора Гамильтона основные понятия теории поля можно записать в виде операций векторной алгебры.

Рассмотрим некоторые операции второго порядка.

1. Вихревое поле является соленоидальным: $div(rot(\vec{a})) = 0$.

Раскроем смешанное произведение, учитывая, что векторное произведение одинаковых векторов равно нулю:

$$(\vec{\nabla} \cdot [\vec{\nabla} \times \vec{a}]) = (\vec{a} \cdot [\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}]) = (\vec{a} \cdot \vec{0}) = 0.$$

2. Векторное поле $\vec{a} = grad(u)$ является безвихревым, так как $rot(grad(u)) = 0$. Действительно, $[\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}u] = [\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}]u = 0 \cdot u = 0$.

3. Рассмотрим операцию $div(grad(u))$.

$$div(grad(u)) = (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}u) = div\left(\frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \Delta u.$$

- О** Дифференциальный оператор вида $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ называется оператором Лапласа. Оператор Лапласа можно представить как скалярное произведение оператора Гамильтона самого на себя:

$$\Delta = (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) = (\vec{\nabla})^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Уравнение вида $\Delta u = 0$ называется уравнением Лапласа и является одним из основных уравнений математической физики. Непрерывное решение уравнения Лапласа $u(x, y, z)$ называется гармонической функцией. Соответствующее скалярное поле называется гармоническим или лапласовым.

- !** Векторное поле является гармоническим, если оно является одновременно потенциальным и соленоидальным: $rot \vec{a} = 0$; $div \vec{a} = 0$.

- !** Рассмотрим операцию $rot(rot(\vec{a}))$.

Формула двойного векторного произведения дает:

$$\left[\vec{a} \times \left[\vec{b} \times \vec{c} \right] \right] = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad \{\text{формула «бац минус цаб»}\}.$$

$$\left[\vec{\nabla} \times \left[\vec{\nabla} \times \vec{a} \right] \right] = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) - \vec{a}(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) = \vec{\nabla} \cdot div \vec{a} - \vec{\nabla}^2 \vec{a} = grad(div \vec{a}) - \Delta \vec{a}.$$

Дифференциальные операции второго порядка удобно свести в таблицу.

	Скалярное поле	Векторное поле	
	<i>grad</i>	<i>div</i>	<i>rot</i>
<i>grad</i>		$grad(div \vec{a})$	
<i>div</i>	$div(grad(u)) = \Delta u$		$div(rot(\vec{a})) = 0$
<i>rot</i>	$rot(grad(u)) = 0$		$rot(rot(\vec{a})) = grad(div \vec{a}) - \Delta \vec{a}$

Пример:

Законы электромагнетизма описываются уравнениями Максвелла в дифференциальной форме:

$$\frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = [\vec{\nabla} \times \vec{H}], \quad -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = [\vec{\nabla} \times \vec{E}], \quad (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = 0; \quad (\vec{\nabla} \cdot \vec{H}) = 0.$$

Иначе:

$$\frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = rot \vec{H} \quad (1), \quad div \vec{E} = 0 \quad (2); \quad -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = rot \vec{E} \quad (3), \quad div \vec{H} = 0 \quad (4).$$

В данном случае нет зарядов и токов, а \vec{E} , \vec{H} - векторы напряжённости электрического и магнитного полей; ε , μ - электрическая и магнитная проницаемость; c - скорость света.

Если продифференцировать (1) по t и подставить $\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ из (3), то получим

$$\frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \left[\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right] \text{ или } \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \left[\vec{\nabla} \times \left[\vec{\nabla} \times \vec{E} \right] \right].$$

Преобразуем правую часть по формуле: $\left[\vec{\nabla} \times \left[\vec{\nabla} \times \vec{E} \right] \right] = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E}$.

Итак, для векторного поля \vec{E} имеем уравнение $\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{c^2}{\varepsilon \mu} \cdot \Delta \vec{E}$.

Это одно из основных уравнений математической физики, называемое **волновым уравнением**.

В результате изучения материала, изложенного в этих лекциях, студент должен владеть следующими понятиями и уметь вычислять:

- скалярное и векторное поля, способы наглядного описания (поверхности и линии уровня, векторные линии);
- интегральные характеристики векторного поля: поток, способы его вычисления, физический смысл; линейный интеграл, способы вычисления, физический смысл;
- дифференциальные характеристики скалярного и векторного полей: градиент, его свойства и способы вычисления; дивергенция, ее свойства и способы вычисления; ротор, его свойства и способы вычисления;
- связь между дифференциальными и интегральными характеристиками (теорема Остроградского – Гаусса, теорема Стокса); инвариантные определения дифференциальных характеристик;
- специальные виды векторных полей, их свойства;
- операторы Гамильтона и Лапласа.

Лекции 10 - 11

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

В лекциях 10 – 11 рассматриваются числовые ряды – важнейшее средство изображения, изучения и приближенного вычисления чисел и функций. Приведены основные положения, позволяющие исследовать вопрос о сходимости ряда и, в отдельных случаях, приближенно вычислять значение суммы ряда.

- 10.1. Числовые ряды. Общие положения
- 10.2. Ряды с положительными членами
- 10.3. Теоремы сравнения рядов с положительными числами
- 11.1. Достаточные признаки сходимости числовых рядов с положительными членами
 - 11.1.1. Признак Даламбера
 - 11.1.2. Признак Коши
 - 11.1.3. Интегральный признак сходимости
- 11.2. Знакопеременные ряды
- 11.3. Знакопеременные ряды. Признак Лейбница

10.1. Числовые ряды. Общие положения

- Выражение $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$, где $\{u_n\}$ - заданная бесконечная числовая последовательность, называется **числовым рядом**, а числа u_n - **членами ряда**.
- Конечные суммы $S_1 = u_1$, $S_2 = u_1 + u_2, \dots$, $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ называются **частичными суммами ряда**.
- Если существует конечный предел последовательности частичных сумм $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, то ряд называется **сходящимся**, а число S - **суммой ряда**. В противном случае ($S_n \rightarrow \infty, \exists \bar{S}$) ряд **расходится** и суммы не имеет.

Пример:

Исследуйте на сходимость ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

Частичная сумма $S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$.

Разложим $\frac{1}{n(n+1)}$ на сумму простейших дробей: $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$,

тогда

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1},$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$, ряд сходится по определению.

Пример:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n = \infty$, ряд расходится.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + 1 - \dots$. $S_1 = -1$, $S_2 = 0$, $S_3 = -1$, $S_4 = 0, \dots$

Предел частичных сумм не существует, ряд расходится.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = 1 + q + q^2 + \dots$. По формуле суммы геометрической про-

грессии $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$, для $b_1 = 1$ получаем $S_n = \frac{1-q^n}{1-q}$.

1). Если $|q| < 1$, то $q^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1-q} = S$.

2). Если $|q| > 1$, то, $q^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$. $S_n \rightarrow \infty \Rightarrow$ предел S_n не существует.

3). Если $q = 1$, то $S_n = n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$.

Если $q = -1$, то $S_n = \begin{cases} 0, & \text{при } n \text{ четном,} \\ 1, & \text{при } n \text{ нечетном} \end{cases}$ и предел не существует.

Итак, $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ $\begin{cases} \text{сходится при } |q| < 1; \\ \text{расходится при } |q| \geq 1. \end{cases}$

Т Отбрасывание конечного числа **начальных** членов ряда не влияет на его сходимость (но влияет на сумму).

Доказательство:

Рассмотрим ряды:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (1)$$

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} u_n = u_{m+1} + u_{m+2} + \dots \quad (2)$$

Обозначим сумму отброшенных членов через A . Тогда частичная сумма для ряда (1) при $n > m$ равна $S_n = A + \delta_{n-m}$, где δ_{n-m} - частичная сумма ряда (2).

При $n \rightarrow \infty$: $(n - m) = k \rightarrow \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = A + \lim_{k \rightarrow \infty} \delta_k$. Так как существует $\lim_{n \rightarrow \infty} A = A$, то S_n и δ_k сходятся или расходятся одновременно (по теореме о пределе суммы).

Г Если члены сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$ умножить на одно и то же число C , то его сходимость не нарушится, а сумма умножится на это число: $\sum_{n=1}^{\infty} C u_n = CS$.

Доказательство: $\lim_{n \rightarrow \infty} C S_n = C \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = CS$.

Пример:

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a q^{n-1}$ сходится при $|q| < 1$. $\left(S_n = \frac{a - a q^n}{1 - q}, S = \frac{a}{1 - q} \right)$

Г Два сходящихся ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$ можно почленно складывать (вычитать) так, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ - сходится, и его сумма равна $A \pm B$.

Доказательство:

$$S_n = (a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \dots + (a_n \pm b_n) =$$

$$= (a_1 + a_2 + \dots) + (b_1 + b_2 + \dots) = A_n \pm B_n;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} B_n = A \pm B.$$

Г **Критерий Коши сходимости числового ряда.** Для того чтобы числовой ряд был сходящимся, необходимо и достаточно, чтобы для $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N = N(\varepsilon)$, $\forall n > N$ и $k = 1, 2, 3, \dots$ выполнялось неравенство $|S_{n+k} - S_n| = |u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+k}| < \varepsilon$.

Т **Необходимый признак сходимости числового ряда.** Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то общий член сходящегося ряда стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

Доказательство:

$u_n = S_n - S_{n-1}$. Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$. В противном случае ряд расходится.

Это условие не является достаточным.

Покажем, что гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$ расходится, несмотря на то, что $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Рассмотрим

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, критерий Коши не выполняется и гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится.

Пример:

1. Исследуйте на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4-5n^2}{(n-1)(n+2)}$.

Ряд расходится, так как для него не выполняется необходимый признак сходимости:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4-5n^2}{(n-1)(n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4-5n^2}{n^2+n-2} = -5 \neq 0$$

2. Исследуйте на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$.

Проверим выполнение необходимого признака сходимости:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} \neq 0;$$

ряд расходится.

10.2. Ряды с положительными членами

Рассмотрим числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$, где $u_n \geq 0$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Для такого ряда $S_{n+1} = S_n + u_{n+1} \geq S_n$, значит, последовательность частичных сумм возрастает. Из теоремы о пределе монотонной последовательности вытекает следующее.

Условие сходимости ряда с положительными членами: ряд с положительными членами всегда имеет сумму; она будет **конечна** (ряд **сходящимся**), если частичные суммы ряда ограничены сверху, и **бесконечна** (ряд **расходящимся**) в противном случае.

10.3. Теоремы сравнения рядов с положительными членами

Пусть даны два положительных ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad u_n \geq 0 \quad (1)$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n, \quad v_n \geq 0. \quad (2)$$

Г Если хотя бы начиная с некоторого n выполняется неравенство $u_n \leq v_n$, то из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1); из расходимости ряда (1) следует расходимость ряда (2).

Доказательство:

Так как отбрасывание конечного числа начальных членов ряда не влияет на сходимость, можно считать, что $u_n \leq v_n \quad \forall n = 1, 2, 3, \dots$

Для частичных сумм этих рядов выполняется $U_n \leq V_n$.

Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится, тогда $V_n \leq S$, откуда $U_n \leq S$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится.

Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится, тогда $U_n \geq S$, $V_n \geq S$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ расходится.

Г Если существует конечный предел отношения общих членов (1) и (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = k$, $v_n \neq 0$, $0 \leq k < \infty$, то оба ряда либо одновременно сходятся, либо одновременно расходятся.

Пример:

Исследуйте на сходимость следующие ряды:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots$$

Сравним члены этого ряда с членами расходящегося гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Так как $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$, исследуемый ряд расходится.

2) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится по теореме сравнения, так как предел отношения общего члена данного ряда к общему члену сходящегося (доказано ранее) ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ есть $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{(n+1)^2} = 1$, постоянное число.

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^n} + \dots$$

Сравним этот ряд с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$, который представляет собой бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $q = \frac{1}{2} < 1$, а следовательно, сходится.

Так как $\frac{1}{n^n} < \frac{1}{2^n}$, исследуемый ряд сходится.

$$4) \text{Ряд } \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Сравним этот ряд с расходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} v_n$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1, \text{ с учетом того, что } (\ln(1 + \alpha) \sim \alpha), \alpha \rightarrow 0.$$

Приведем полученные данные о сходимости некоторых рядов, которые могут быть использованы для сравнения:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \begin{cases} \text{сходится, если } \alpha > 1, \\ \text{расходится, если } \alpha \leq 1. \end{cases}$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n} \begin{cases} \text{сходится, если } |a| < 1, \\ \text{расходится, если } |a| \geq 1. \end{cases}$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \text{ сходится.}$$

$$4. \sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q} \begin{cases} \text{сходится при } |q| < 1, \\ \text{расходится при } |q| \geq 1. \end{cases}$$

11.1. Достаточные признаки сходимости числовых рядов с положительными членами

11.1.1. Признак Даламбера

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ с положительными членами и предел отношения последующего члена ряда к предыдущему.

1) Если $u_n > 0$; и 2) существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$,

тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \begin{cases} \text{сходится, если } l < 1, \\ \text{расходится, если } l > 1, \\ \text{признак не дает ответа, если } l = 1. \end{cases}$$

Доказательство:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : n \geq N, \quad \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - l \right| < \varepsilon, \text{ т.е. } l - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < l + \varepsilon.$$

Рассмотрим 3 случая:

1) $l < 1$.

Выберем ε столь малым, чтобы $l + \varepsilon < 1$, тогда, полагая $l + \varepsilon = q$,

$0 < q < 1$, имеем $\frac{u_{n+1}}{u_n} < q$, $u_{n+1} < u_n \cdot q$ для $n = N, N+1, N+2, \dots, u_{N+1} < u_N \cdot q$,

$u_{N+2} < u_{N+1} \cdot q < u_N \cdot q^2$, $u_{N+3} < u_{N+2} \cdot q < u_N \cdot q^3$ и т.д.

Члены ряда $u_{N+1} + u_{N+2} + u_{N+3} + \dots$ (1) меньше членов геометрической прогрессии: $u_N q + u_N q^2 + u_N q^3 + \dots$ (2). Так как $q < 1$, то ряд (2) сходится, значит, по теореме сравнения сходится и ряд (1).

2) $l > 1$.

Возьмем $\varepsilon > 0$ столь малым, что $l - \varepsilon > 1$, тогда при $n \geq N$ $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$,

$u_{n+1} > u_n$, члены ряда не стремятся к нулю, т.е. не выполняется необходимый признак сходимости ряда, следовательно, ряд расходится.

3) $l = 1$.

Покажем, что в этом случае ряд может как сходиться, так и расходиться.

1). Гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, для него $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$.

2). Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Для него также $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$. Сравним члены исследуемого ряда со сходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ (доказано ранее): $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$, $\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)}$, значит, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится.

Пример:

Исследуйте на сходимость ряды:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}. \quad u_n = \frac{1}{n!} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n(n+1)},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Ряд сходится.

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{\sqrt{n}2^n}.$$

$$\text{Вычислим } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{2n+1} \cdot \sqrt{\frac{n}{n+1}} \cdot \frac{2^{\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1,$$

ряд сходится.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(2n+1)!}{(3n)!}$ можно убедиться, что $u_n \rightarrow 0$, выполняется необходимый признак сходимости.

$$\text{Вычислим } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!(2(n+1)+1)!(3n)!}{(3n+3)!n!(2n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!(2n+3)!(3n)!}{(3n+3)!n!(2n+1)!} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(2n+2)(2n+3)}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{27} < 1, \text{ исследуемый ряд сходится.}$$

11.1.2. Признак Коши

Если 1) $u_n > 0$ и 2) существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = l$,

тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \begin{cases} \text{сходится, если } l < 1, \\ \text{расходится, если } l > 1, \\ \text{признак не дает ответа, если } l = 1. \end{cases}$$

Доказательство:

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = l \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \Rightarrow \left| \sqrt[n]{u_n} - l \right| < \varepsilon, \quad l - \varepsilon < \sqrt[n]{u_n} < l + \varepsilon.$$

- 1) $l < 1$. Выберем ε так, чтобы $l + \varepsilon = q$, $q < 1$. Тогда $\sqrt[n]{u_n} < q$, $u_n < q^n$.
 Так как $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ сходится при $q < 1$, то и $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ - сходится.
- 2) $l > 1$. Выберем ε так, чтобы $q = l - \varepsilon > 1$. Тогда $l - \varepsilon < \sqrt[n]{u_n} \Rightarrow u_n > q^n > 1$: $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$ и $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится при $l > 1$.
- 3) $l = 1$. Признак ответа не дает, ряд может как сходиться, так и расходиться.

Рассмотрим те же примеры, что и при рассмотрении признака Даламбера.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}. \text{ Пусть } \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = C_n, \ln C_n = -\frac{\ln n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, C_n = \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1,$$

но ряд расходится.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}. \text{ Пусть } \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = C'_n, \ln C'_n = -\frac{2 \ln n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, C'_n = \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1,$$

но ряд сходится.

Пример:

Исследуйте на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{2} < 1, \text{ ряд сходится.}$$

11.1.3. Интегральный признак сходимости

- Пусть 1) $u_n > 0$ и 2) $u_n \geq u_{n+1}$, то есть члены ряда не возрастают,
 3) $f(n)$ – такая непрерывная не возрастающая функция, что $f(n) = u_n$.

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и несобственный инте-

грал $\int_1^{\infty} f(x) dx$ либо одновременно сходятся,

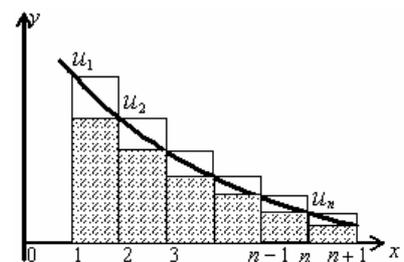
либо одновременно расходятся.

Доказательство:

Изобразим ситуацию геометрически.

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x=1$, $x=n+1$, $y=0$ и

графиком функции $y=f(x)$, равна $I_{n+1} = \int_1^{n+1} f(x) dx$.



Площадь ступенчатой фигуры, описанной около этой криволинейной трапеции, равна частичной сумме ряда $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

Площадь ступенчатой фигуры, вписанной в ту же криволинейную трапецию, равна $S_{n+1} - u_1 = u_2 + u_3 + \dots + u_{n+1}$.

Последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ и последовательность $\{I_n\}$ монотонно возрастают: $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} > 0$, $I_{n+1} - I_n = \int_n^{n+1} f(x)dx > 0$.

Очевидно, $S_{n+1} - u_1 < I_{n+1} < S_n$.

Переходя к пределам, получаем $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n+1} - u_1 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} I_{n+1} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, или, так как $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} I_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n - u_1 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} I_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

1). Если интеграл сходится, $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = I = \int_1^{\infty} f(x)dx < \infty$, то

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n \leq I + u_1 < \infty$, ряд сходится. Если ряд сходится, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S < \infty$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n \leq S < \infty$, интеграл сходится.

2). Если интеграл расходится, $I_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$, то и $S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ (так как $S_n > I_n$), ряд расходится. Если ряд расходится, $S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$, то $(S_n - u_1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$, и, так как $I_n > S_n - u_1$, $I_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$, интеграл расходится.

Пример:

Исследуйте на сходимость ряды:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(n+1) \ln^2(n+1)} \right); \quad f(x) = \frac{1}{(x+1) \ln^2(x+1)}.$$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{(x+1) \ln^2(x+1)} = \int_1^{\infty} \frac{d(\ln(x+1))}{\ln^2(x+1)} = \lim_{a \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{\ln(x+1)} \Big|_1^a \right) =$$

$$= \lim_{a \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln(a+1)} \right] = \frac{1}{\ln 2},$$

исследуемый ряд сходится.

$$2) \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{(n-2)\sqrt{\ln(n-3)}} = \sum_{n=5}^{\infty} u_n.$$

Исследуем на сходимость вспомогательный ряд

$$\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{(n-3)\sqrt{\ln(n-3)}} = \sum_{n=5}^{\infty} v_n$$

с помощью интегрального признака.

$$\text{Несобственный интеграл } \int_5^{\infty} \frac{dx}{(x-3)\sqrt{\ln(x-3)}} = \int_2^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{\ln(x-3)} \Big|_5^{\infty} = \infty$$

расходится, следовательно, расходится вспомогательный ряд

$$\sum_{n=5}^{\infty} v_n.$$

Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-3}{n-2} = 1$, то по второй теореме сравнения ис-

ходный ряд также расходится.

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}; \quad f(x) = \frac{1}{x}.$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \ln|x| \Big|_1^a = \infty, \text{ исследуемый ряд расходится.}$$

Заметим, что для оценки остатка ряда R_n с положительными членами удобно пользоваться интегральным признаком сходимости.

Если этот признак применим к ряду $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$, то имеет место оценка

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x) dx < R_n < \int_n^{\infty} f(x) dx.$$

Пример:

Сколько членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ нужно взять, чтобы получить значение суммы ряда с точностью до 0,001?

Здесь $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $\int_n^{\infty} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_n^{\infty} = \frac{1}{n}$, по условию $\frac{1}{n} > 0,001$, $n > 1000$, значит нужно взять 1001 член.

11.2. Знакопеременные ряды

Рассмотрим ряды, содержащие бесконечное множество положительных и бесконечное множество отрицательных членов. Такие ряды называются знакопеременными.

Т Если для знакопеременного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (1)$$

сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = |u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| + \dots, \quad (2)$$

то ряд (1) сходится.

Доказательство:

Рассмотрим вспомогательный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + |u_n|) = (u_1 + |u_1|) + (u_2 + |u_2|) + \dots + (u_n + |u_n|) + \dots \quad (3)$$

для него справедливо неравенство $0 \leq u_n + |u_n| \leq 2|u_n|$, $n = 1, 2, \dots$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (2|u_n|)$ сходится из условия сходимости ряда (2);

Ряд (3) сходится на основании первого признака сравнения.

Ряд (1) есть разность двух сходящихся рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n + |u_n|) - \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \text{ и, следовательно, сходится.}$$

! Обратное утверждение неверно.

О Сходящийся ряд, для которого ряд, составленный из абсолютных величин его членов, также сходится, называется **абсолютно сходящимся**.

Заметим, что доказанный признак сходимости **достаточен, но не необходим**: существуют знакопеременные ряды, для которых ряды, составленные из абсолютных величин их членов, расходятся.

О Сходящийся ряд, для которого ряд из абсолютных величин его членов расходится, называется **условно сходящимся**.

Пример:

	1. Знакопередающийся	ряд
	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \dots$	
	сходится условно по признаку Лейбница (см. ниже), так как $\frac{1}{n-1} > \frac{1}{n}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, но соответствующий ряд из абсолютных величин членов данного ряда (1) является гармоническим $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ и расходится.	
	2. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$ сходится абсолютно, так как этот знакопередающийся ряд сходится по признаку Лейбница (см. ниже), и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится тоже.	

11.3. Знакопередающиеся ряды. Признак Лейбница

О Ряд называется знакопередающимся, если его члены являются (поочередно) положительными и отрицательными. Такой ряд можно записать в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - \dots + (-1)^{n-1} u_n + \dots, \quad (1)$$

где $u_n > 0$ для любого n . Если первый член ряда отрицателен, то

исследуют ряд $-\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$.

Т **Признак Лейбница.** Если в знакопередающемся ряде (1):

1) абсолютные величины членов ряда монотонно убывают $u_1 > u_2 > u_3 > \dots$,

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, то а) ряд (1) сходится; б) его сумма $S > 0$ положительна и не превосходит первого члена ряда, то есть, $S < u_1$.

Доказательство:

Рассмотрим последовательность четных частичных сумм знакопередающегося ряда (1):

$$S_2 = u_1 - u_2, \quad S_4 = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) \dots,$$

$$S_{2n} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \dots + (u_{2n-1} - u_{2n}).$$

Каждая из разностей, стоящих в скобках, положительна по условию теоремы, значит, $S_{2n} > 0$ и последовательность S_{2n} является возрастающей.

Если записать эту сумму в виде $S_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \dots - u_{2n}$, то каждая из разностей в скобках положительна и $S_{2n} < u_1$, т.е. последовательность S_{2n} ограничена сверху.

Итак, последовательность S_{2n} является возрастающей и ограничена сверху, следовательно, имеет предел $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = S$ причем $0 < S < u_1$.

Последовательность нечетных частичных сумм $S_{2n+1} = S_{2n} + u_{2n+1}$. Переходя к пределу, имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} + \lim_{n \rightarrow \infty} u_{2n+1} = S$, следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, ряд (1) сходится.

Признак Лейбница используется для приближенного вычисления суммы знакопередающегося ряда с определенной точностью. Сумма

отброшенных членов знакочередующегося ряда Лейбница по абсолютной величине не превосходит первый отброшенный член.

Пример:

Сколько членов ряда нужно взять,

чтобы сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = S$ найти с точностью до 0,001?

Решение:

Представим сумму ряда в виде: $S = S_k + \delta$, где $S_k = \sum_{n=1}^k u_n$, $\delta = \sum_{n=k+1}^{\infty} u_n$

по признаку Лейбница.

По условию, $u_{k+1} = \frac{1}{k+1} < 0,001$, откуда $k > 999$, нужно взять 1000 членов ряда.

В результате изучения материала, изложенного в этих лекциях, студент должен знать:

- определения ряда, суммы ряда, частичной суммы ряда;
- необходимый и достаточный признак сходимости ряда (критерий Коши);
- необходимый признак сходимости ряда;
- теоремы сравнения рядов с положительными членами;
- достаточные признаки сходимости числовых рядов с положительными членами: признак Даламбера, признак Коши, интегральный признак сходимости;
- исследование знакопеременных рядов, абсолютная сходимость;
- знакочередующиеся ряды, признак Лейбница.

Лекции 12 – 14

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

В лекциях 12 – 14 рассматриваются функциональные ряды и важнейшая их разновидность – степенные ряды. При достаточно широких предположениях относительно функции ее можно представить как сумму некоторого функционального ряда, причем математические операции над этим рядом (сложение, умножение, предельный переход, почленное дифференцирование и интегрирование) совершаются по тем же простым правилам, что и одноименные операции над конечными суммами. Подобная простота применения и легкость получения конкретных результатов обуславливает широкое применение функциональных рядов в математике и ее приложениях.

- 12.1. Функциональные ряды. Основные определения
- 12.2. Равномерная сходимость
- 12.3. Признак Вейерштрасса
- 13.1. Степенные ряды. Основные определения
- 13.2. Вычисление радиуса сходимости
- 13.3. Свойства степенных рядов
- 13.4. Разложение функций в степенные ряды Тейлора и Маклорена
- 13.5. Разложение элементарных функций в ряды Маклорена
- 13.6. Применение степенных рядов
 - 13.6.1. Вычисление значений функций
 - 13.6.2. Вычисление интегралов, не берущихся в элементарных функциях
 - 13.6.3. Решение дифференциальных уравнений
- 14.1. Ряды в комплексной области. Числовые ряды
- 14.2. Степенные ряды в комплексной области

12.1. Функциональные ряды. Основные определения

Пусть функция $f_n(x)$, $n \in N$ определена в области D , $x \in D$

О Выражение вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots \quad (1)$$

называется **функциональным рядом**.

Например, $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{x}{n} = \sin x + \sin \frac{x}{2} + \dots + \sin \frac{x}{n} + \dots$

При $x = x_0 \in D$ из функционального ряда (1) получается числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0) = f_1(x_0) + f_2(x_0) + \dots \quad (2)$$

- О** Если для $x_0 \in D$ числовой ряд (2) сходится, то точка x_0 называется **точкой сходимости** функционального ряда (1). Если в каждой точке $x \in D_1 \subset D$ числовые ряды $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходятся, то функциональный ряд (1) называется **сходящимся** в области D_1 .
- О** Совокупность всех точек сходимости образует **область сходимости** функционального ряда (1).

Рассмотрим частичные суммы функционального ряда (1):

$$S_k(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_k(x).$$

Ряд (1) сходится к функции $f(x)$ в области сходимости, если предел последовательности его частичных сумм $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k(x) = f(x)$.

Пример:

Найдите область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^{2n}} = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^4} + \dots + \frac{1}{1+x^{2n}} + \dots, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Если $|x| < 1$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x^{2n}} = 1 \neq 0$, ряд расходится, так как не выполняется необходимый признак сходимости ряда; если $x = \pm 1$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$ расходится; если $|x| > 1$: $\frac{1}{1+x^{2n}} < \frac{1}{x^{2n}}$ - бесконечно убывающая геометрическая прогрессия.

Сравнение со сходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^{2n}}$ при $|x| > 1$ дает область сходимости исследуемого ряда $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

12.2. Равномерная сходимость

Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = f(x)$. По определению предела это означает, что для любого x из области сходимости, например, x_0 и x_1 , выполняются условия:

$$1) \quad x = x_0 \in D_1: \quad \forall \varepsilon > 0 \exists N_0(\varepsilon), \quad n > N_0 \Rightarrow |S_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon;$$

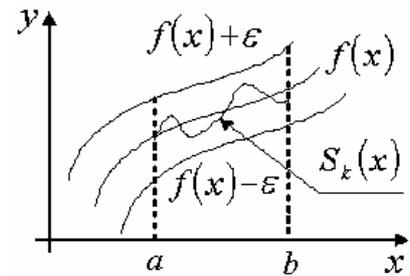
$$2) \quad x = x_1 \in D_1, \quad x_0 \neq x_1: \quad \forall \varepsilon > 0 \exists N_1(\varepsilon), \quad n > N_1 \Rightarrow |S_n(x_1) - f(x_1)| < \varepsilon.$$

Заметим, что числа N_0 и N_1 , вообще говоря, различны.

О Функциональный ряд, сходящийся для всех $x \in D_1$ из области сходимости, называется **равномерно сходящимся** в этой области, если $\forall \varepsilon > 0$ существует не зависящий от x номер $N(\varepsilon)$, такой, что при $n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|R_n(x)| < \varepsilon$ для всех x из области сходимости, где $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) -$

остаток ряда.

Геометрический смысл равномерной сходимости заключается в следующем: Если окружить график функции $y = f(x)$ ” ε -полоской”, определяемой соотношением $f(x) - \varepsilon < y < f(x) + \varepsilon$, $\forall x \in [a, b]$, то графики **всех** функций $S_k(x)$, начиная с достаточно большого k , **целиком** лежат в этой ” ε -полоске”, окружающей график предельной функции $y = f(x)$.



Покажем, что ряд $\frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^4 + 2} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{x^{2n} + n} + \dots$ сходится равномерно при всех x ($-\infty < x < \infty$).

По признаку Лейбница этот ряд сходится и его остаток можно оценить следующим образом:

$$|R_n(x)| < |u_{n+1}(x)|, \quad |R_n(x)| < \frac{1}{x^{2n+2} + n + 1} < \frac{1}{n + 1}, \quad \frac{1}{n + 1} \leq \varepsilon, \quad n \geq \frac{1}{\varepsilon} - 1.$$

Возьмем $N = \frac{1}{\varepsilon} - 1$, тогда для $n \geq N \Rightarrow |R_n(x)| < \varepsilon$ для $\forall x$ из области сходимости, значит ряд равномерно сходится.

О Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ называется **мажорируемым** в некоторой области изменения x , если существует такой сходящийся числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ с положительными членами, что для всех x из этой области выполняются неравенства $|f_n(x)| \leq u_n$, $n = 1, 2, \dots$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется **мажорантой** ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

12.3. Признак Вейерштрасса (признак равномерной сходимости функционального ряда)

Функциональный ряд **сходится равномерно** в области сходимости, если он является **мажорируемым** в этой области.

Например, для рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$, (1), $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ (2) в силу ограниченности функций выполняется $|a_n \sin nx| \leq |a_n|$, $|a_n \cos nx| \leq |a_n|$.

По признаку Вейерштрасса, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится **абсолютно**, то ряды (1), (2) **сходятся равномерно** на \forall промежутке.

Теоремы о почленном интегрировании и дифференцировании функциональных рядов

Т Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$ с непрерывно дифференцируемыми членами сходится для $x \in [a, b]$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ сходится равномерно на $[a, b]$, тогда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится **равномерно**, его сумма дифференцируема и $[f(x)]' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$, т.е. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ можно дифференцировать **почленно**.

Т Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$ **равномерно сходится** на $[a, b]$, тогда:

1) этот ряд можно почленно интегрировать на этом отрезке и

2) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$ сходится равномерно.

Пример:

Найдите сумму ряда $\sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 9n + 5)x^{n+1} = f(x)$.

Решение:

Для нахождения суммы ряда воспользуемся известной формулой для суммы геометрической прогрессии

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1. \quad (1)$$

Дифференцируя левую и правую части формулы (1), получим последовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \left(\frac{1}{1-x}\right)', \quad \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)'' \quad (2)$$

Заменяем в формулах (2) индекс суммирования:

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n, \quad \left(\frac{1}{1-x}\right)'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)x^n.$$

Выделим в сумме, подлежащей вычислению, слагаемые, пропорциональные первой и второй производной:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 9n + 5)x^{n+1} &= \sum_{n=0}^{\infty} ((n+2)(n+1) + 6(n+1) - 3)x^{n+1} = \\ &= x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)x^n + 6 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n - 3 \sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) = \\ &= x \left(\left(\frac{1}{1-x}\right)'' + 6 \left(\frac{1}{1-x}\right)' - 3 \left(\frac{1}{1-x}\right) \right). \end{aligned}$$

Вычислим производные:

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad \left(\frac{1}{1-x}\right)'' = \left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)' = \frac{2}{(1-x)^3},$$

тогда

$$f(x) = x \left\{ \frac{2}{(1-x)^3} + \frac{6}{(1-x)^2} - \frac{3}{1-x} \right\} = \frac{-3x^3 + 5}{(1-x)^3}.$$

13.1. Степенные ряды. Основные определения

○ Функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots \quad (1)$$

называется **степенным по степеням** $(x - x_0)$.

В частности, при $x_0 = 0$ ряд

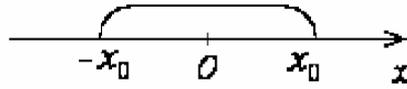
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \quad (2)$$

является степенным по степеням x .

Ряд (1) сводится к ряду (2) заменой $(x - x_0) \rightarrow x$, a_0, a_1, a_2, \dots - коэффициенты ряда. Ряд (2) сходится по крайней мере в одной точке: при $x = 0$ $S = a_0$.

Область сходимости степенного ряда. Теорема Абеля

Т 1) Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится в точке x_0 ($x_0 \neq 0$), то он абсолютно сходится для $\forall x: |x| < |x_0|$, причем на \forall отрезке $|x| \leq R < |x_0|$ сходимость будет равномерной.



2) Если степенной ряд расходится в точке x'_0 ($x'_0 \neq 0$), то он расходится и для всех x таких, что $|x| > |x'_0|$.

Доказательство:

1) Пусть $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ сходится, тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n x_0^n = 0 \Rightarrow$ последовательность $a_n x_0^n$ ограничена $\Leftrightarrow \exists M: |a_n x_0^n| < M$.

Рассмотрим ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, запишем его в виде:

$a_0 + a_1 x_0 \frac{x}{x_0} + a_2 x_0^2 \left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \dots$ и сравним с рядом

$M + M \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right| + M \left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \dots$, который представляет собой при $|x| < |x_0|$

геометрическую прогрессию $g = \left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$, т.е. сходится, следовательно-

но, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ абсолютно сходится, т.к. $a_n x^n \leq M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$.

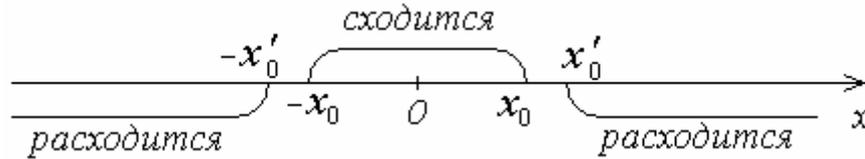
При этом на \forall отрезке $|x| \leq R < |x_0|$ сходимость равномерная, т.к.

сходится мажорирующий числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} M \cdot \left|\frac{R}{x_0}\right|^n$.

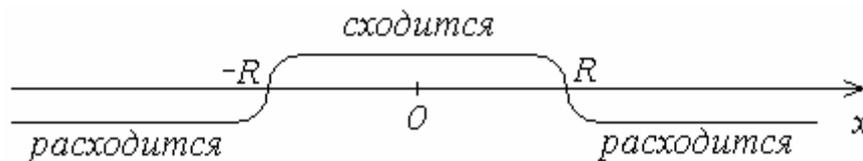
2) Пусть ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x'_0)^n$ расходится. Докажем, что он расходится при

$\forall x: |x| > |x'_0|$.

От противного: пусть $\exists x: |x| > |x'_0|$ и ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится, следовательно, по 1-ой части теоремы Абеля ряд бы сходил в точке x'_0 (т.к. $|x'_0| < |x|$), что противоречит условию.



- С** 1). Областью сходимости степенного ряда является симметричный интервал с центром в точке O .
 2). Существует граница между точками сходимости x_0 и расходимости x'_0 : $R = \text{Sup} \{|x_0|\} = \text{inf} \{|x'_0|\}$.
- О** Число R такое, что при $|x| < R$ ряд сходится, а при $|x| > R$ - расходится, называется **радиусом сходимости** степенного ряда, а интервал $x \in (-R, R)$ - **интервалом сходимости**.

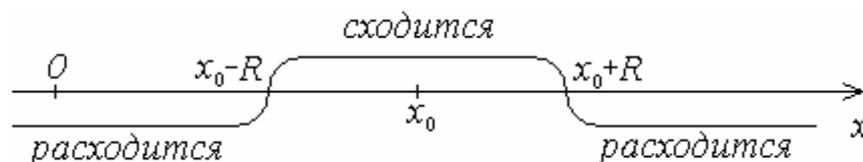


В граничных точках $x = \pm R$ поведение ряда требует дополнительного исследования.

Для ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ интервал сходимости имеет вид:

$$x \in (x_0 - R, x_0 + R)$$

с центром в точке x_0 :



13.2. Вычисление радиуса сходимости

Степенные ряды в области сходимости сходятся абсолютно и можно использовать признаки сходимости рядов с положительными членами.

1. По признаку Даламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}| |x|^{n+1}}{|a_n| |x|^n} = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \begin{cases} < 1, \text{ сходится,} \\ > 1, \text{ расходится.} \end{cases}$$

$$\text{Ряд сходится, если } |x| < \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|}. \quad R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

2. По признаку Коши:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n| |x|^n} = |x| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \begin{cases} < 1, \text{ сходится,} \\ > 1, \text{ расходится.} \end{cases}$$

$$\text{Ряд сходится, если } |x| < \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}. \quad R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Пример:

Найдите область сходимости рядов: 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ и 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

$$1) \quad R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

Интервал сходимости $x \in (-1, 1)$.

Исследуем граничные точки.

$$1) \quad x = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \text{расходится;}$$

$$2) \quad x = -1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} - \text{сходится условно по признаку Лейбница.}$$

Область сходимости ряда $x \in [-1, 1)$.

$$2) \quad R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty, \text{ ряд сходится при всех } x \in (-\infty, \infty).$$

13.3. Свойства степенных рядов

В силу теоремы Абеля степенной ряд сходится **равномерно** на $(-R, R)$, его можно почленно дифференцировать и интегрировать в интервале сходимости.

Г Ряды, полученные почленным дифференцированием и интегрированием степенного ряда, имеют тот же интервал сходимости и их сумма внутри интервала сходимости равна соответственно производной и интегралу от суммы первоначального ряда.

Пример:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = x + x^2 + x^3 + \dots$ сходится равномерно при $\forall x$, удовлетворяющих неравенству $|x| < 1$

$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$ (1) - сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Этот ряд можно почленно интегрировать и дифференцировать:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \left(\frac{x}{1-x} \right)' = \frac{-1}{1-x^2};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \int_0^x \frac{t}{1-t} dt = -x - \ln(1-x).$$

$$2) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x).$$

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots; \quad f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots,$$

$$\int f(x) dx = c + a_0 x + \frac{a_1 x^2}{2} + \dots$$

13.4. Разложение функций в степенные ряды Тейлора и Маклорена

Формула Тейлора для $f(x)$:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x),$$

где $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$ - остаточный член в форме Лагранжа, где $0 < \theta < 1$.

Т Функция $f(x)$, имеющая производные всех порядков в интервале $|x-x_0| < R$, однозначно представима на этом интервале своим **рядом**

Тейлора: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$, где $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$, тогда и только тогда, когда $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$.

Доказательство:

По формуле Тейлора $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$,

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n.$$

Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$, то $\Rightarrow f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x)$.

$P_n(x)$ - частичная сумма ряда Тейлора, ее предел равен сумме ряда $f(x)$, значит, разложение справедливо.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x-x_0)^2 + \dots$$

При $x_0 = 0$ ряд

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots$$

называется **рядом Маклорена**.

Т Для того, чтобы функцию $f(x)$ можно было разложить в степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ на интервале $(-R, R)$ **достаточно**, чтобы $f(x)$ имела на $(-R, R)$ производные всех порядков и чтобы существовала такая постоянная M , что $|f^{(n)}(x)| \leq M$ при $n = 0, 1, 2, \dots$ и при всех $x \in (-R, R)$.

Доказательство:

Так как $f(x)$ имеет производные всех порядков, для нее можно формально построить ряд Маклорена. Докажем, что он сходится к

$f(x)$. По теореме 1 достаточно доказать, что $R_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ для $x \in (-R, R)$.

Остаточный член формулы Маклорена в форме Лагранжа можно оценить следующим образом: $|R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| < \frac{MR^{n+1}}{(n+1)!}$ при $x \in (-R, R)$; $0 < \theta < 1$.

По признаку Даламбера ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{MR^{n+1}}{(n+1)!}$ сходится, значит для него выполняется необходимый признак сходимости и его общий член $\frac{MR^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Значит $R_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, $x \in (-R, R)$, что и требовалось доказать.

Для разложения функции $y = f(x)$ в ряд Тейлора (Маклорена) следует:

- 1) составить ряд по формуле;
- 2) найти его область сходимости;
- 3) доказать, что для всех x из области сходимости

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0 \quad \left(|f^{(n)}(x)| \leq M \right).$$

13.5. Разложение элементарных функций в ряды Маклорена

1. $f(x) = e^x$, $f^{(n)}(x) = (e^x)^{(n)} = e^x$; $f^{(n)}(0) = 1$ $|f^{(n)}(x)| = e^x \leq e^R$
на любом интервале $x \in (-R, R)$ оси x , значит для всех $x \in (-\infty, \infty)$.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, x \in R. \quad (1)$$

2. $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots, x \in R;$ (2)

3. $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots, x \in R.$ (3)

$$\begin{aligned}
4. \quad f(x) &= \sin x, & f(0) &= 0, \\
f'(x) &= \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), & f'(0) &= 1, \\
f''(x) &= -\sin x = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right), & f''(0) &= 0, \\
f^{(n)}(x) &= \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), & f^{(n)}(0) &= \sin\frac{\pi n}{2}. \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad |x| \leq 1.
\end{aligned} \tag{4}$$

$$5. \quad f(x) = \cos x.$$

Разложение функции $\cos x$ получим дифференцированием ряда для $\sin x$ (4):

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad |x| \leq 1. \tag{5}$$

$$6. \quad f(x) = \ln(1+x), \quad x > -1.$$

Продифференцируем $f(x)$ и разложим производную по формуле суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$\left[\ln(1+x) \right]' = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots, \quad -1 < x < 1.$$

Проинтегрируем это равенство почленно:

$$\ln(1+x) = \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,$$

постоянную C найдем, полагая $x = 0$. $\ln 1 = \sum_{n=1}^{\infty} 0 + C \Rightarrow C = 0$.

$$\begin{aligned}
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n, \quad -1 < x \leq 1.
\end{aligned} \tag{6}$$

Здесь учтено, что разложение остается справедливым и при $x = 1$, так как ряд сходится по признаку Лейбница.

$$7. \quad f(x) = \operatorname{arctg} x$$

Представим $\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$.

По формуле суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии $\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \dots$, $-1 < x < 1$.

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x (1 - t^2 + t^4 - \dots) dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}, \quad -1 \leq x \leq 1. \quad (7)$$

Здесь учтено, что при $x = \pm 1$ полученный ряд сходится по признаку Лейбница.

При $x = 1$ получаем ряд Лейбница для вычисления числа π :

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots$$

8. $f(x) = (1+x)^m$, m - произвольное постоянное число.

$$f(x) = (1+x)^m, \quad f(0) = 1$$

$$f'(x) = m(1+x)^{m-1}, \quad f'(0) = m$$

$$f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2}, \quad f''(0) = m(m-1)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$f^{(n)}(x) = m(m-1)\dots[m-(n-1)](1+x)^{m-n},$$

$$f^n(0) = m(m-1)\dots[m-(n-1)].$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots[m-(n-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} x^n + \dots =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} x^n \quad x \in (-1, 1). \quad (8)$$

Область сходимости этого ряда находится по признаку Даламбера:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{m(m-1)\dots(m-n)x^{n+1}n!}{(n+1)! m(m-1)\dots[m-(n-1)]x^n} \right| =$$

$$= |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-m}{n+1} = |x| < 1.$$

Можно доказать, что $R_n(x) \rightarrow 0$ для $x \in (-1, 1)$.

Ряд $(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} x^n$, $x \in (-1,1)$ назы-

вается **биномиальным** рядом.

При различных постоянных m получим разложения следующих функций:

1) $m = -1$:

$$\frac{1}{x+1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n;$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n;$$

2) $m = \frac{1}{2}$: $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \dots;$

3) $m = -\frac{1}{2}$: $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \dots$

9. $f(x) = \arcsin x$, $x \in [-1,1]$, $\arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

Разложим подынтегральную функцию в биномиальный ряд (при $m = -\frac{1}{2}$ и $x = -t^2$) и проинтегрируем почленно:

$$\begin{aligned} \arcsin x &= \int_0^x \left(1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!}t^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!}t^6 + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^n \cdot n!}t^{2n} + \dots \right) dt = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2! \cdot 2^2 \cdot 5} x^5 + \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^n \cdot n! (2n+1)} x^{2n+1}, \quad x \in (-1, 1). \end{aligned} \tag{9}$$

Полученные разложения можно использовать как известные для разложения сложных функций $f(u(x))$ и разложений по степеням двучленов $(x-x_0)$.

Пример:

1). Из разложения экспоненты (1), заменяя x на $-x^2$, получим, что $e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}$, $x \in (-\infty, \infty)$.

2). Заменяя x на $-x$, из разложения для логарифмической функ-

ции $\ln(1+x)$ (6) получим, что

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \quad -1 < x < 1.$$

3). Разложить функцию $\ln x$ по степеням $(x-1)$.

Так как $\ln x = \ln(1+(x-1))$, искомое разложение получается из разложения $\ln(1+x)$ (6) при замене x на $(x-1)$:

$$\ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n}, \quad -1 < x-1 \leq 1,$$

$x \in (0, 2]$

4). Разложить в ряд по степеням $(x+3)$ функцию $\ln(2-5x)$, $x < \frac{2}{5}$.

$$\begin{aligned} \ln(2-5x) &= \ln(2-5(x+3)+15) = \ln 17 \left[1 - \frac{5}{17}(x+3) \right] = \\ &= \ln 17 + \ln \left[1 - \frac{5(x+3)}{17} \right] = \text{(из примера 2) при } x, \text{ равном } \frac{5(x+3)}{17}, \end{aligned}$$

$$\text{следует) } = \ln 17 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[\frac{5(x+3)}{17} \right]^n = \ln 17 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{17} \right)^n \frac{(x+3)^n}{n},$$

$$-1 < \frac{5(x+3)}{17} < 1, \quad -\frac{17}{5} < x+3 < \frac{17}{5}, \quad -\frac{32}{5} < x < \frac{2}{5}.$$

Можно убедиться, что при $x = -\frac{32}{5}$ ряд является условно сходящимся, а при $x = \frac{2}{5}$ он принимает вид гармонического ряда и расходится. Интервал сходимости $x \in \left[-\frac{32}{5}, \frac{2}{5} \right)$.

5). Разложить функцию $\cos x$ по степеням $\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

Введем новую переменную $x - \frac{\pi}{2} = t$, тогда

$$\cos x = \cos \left(t + \frac{\pi}{2} \right) = -\sin t.$$

Из разложения

$$-\sin t = -\left[t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots \right] = -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{t^{2n-1}}{(2n-1)!}, \quad -\infty < t < \infty.$$

Переходя к старой переменной, получим:

$$\cos x = -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{2n-1}}{(2n-1)!} = -\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3}{3!} - \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^5}{5!} + \dots$$

13.6. Применение степенных рядов

13.6.1. Вычисление значений функций

1) Вычислить $\sin 10^\circ$ с точностью 0,001.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \text{ . Ряд сходится при } x \in R. 10^\circ = \frac{\pi \cdot 10^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi}{18},$$

$$\sin 10^\circ = \frac{\pi}{18} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{18} \right)^3 + \frac{1}{5!} \left(\frac{\pi}{18} \right)^5 - \dots \text{ Ряд знакочередующийся, остаток ряда}$$

можно оценить по признаку Лейбница. Найдем член ряда, меньший по модулю, чем 0,001. $|u_2| = \left(\frac{\pi}{18} \right)^3 \cdot \frac{1}{3!} < 0.001$ По признаку Лейбница по-

грешность от отбрасывания всех членов, начиная с n -го равна $|R_n| < |u_{n+1}|$, значит $|R_1| < |u_2| < 0.001$

$$\sin 10^\circ = \frac{\pi}{18} = 0,174.$$

1) Вычислить с точностью до 0,01 значение $\ln 8$.

$\ln 8 = \ln 2^3 = 3 \ln 2$. Вычислим $\ln 2$. Воспользуемся рядами:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots, \quad \ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots,$$

$$\ln \frac{(1+x)}{(1-x)} = \ln(1+x) - \ln(1-x) = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \right), \quad |x| < 1$$

При каком значении x $\frac{1+x}{1-x} = 2$?

$$1+x = 2(1-x) \rightarrow x = \frac{1}{3}.$$

$$\ln 2 = 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^5 \cdot 5} + \dots \right)$$

$$\ln 8 = 3 \cdot 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^3} \cdot \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{3^{2n+1}} \cdot \frac{1}{2n+1} + \dots \right)$$

Сколько членов нужно оставить, чтобы вычислить $\ln 8$ с точностью 0,01?

$$R_n = 3 \cdot 2 \left[\frac{1}{3^{2n+1}} \cdot \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3^{2n+3}} \cdot \frac{1}{2n+3} + \dots \right] < 6 \cdot \frac{1}{3^{2n+1}} \cdot \frac{1}{2n+1} \left[1 + \left(\frac{1}{3} \right)^2 + \left(\frac{1}{3} \right)^4 + \dots \right] =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{3^{2n}} \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{9}} = 2 \frac{1}{3^{2n}} \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{9}{8},$$

$$R_2 < 2 \cdot \frac{1}{3^4} \cdot \frac{1 \cdot 9}{5 \cdot 8} = \frac{1}{180} \approx 0,005 < 0,01.$$

$$\ln 8 \approx 6 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{81} \right) = 2 + \frac{2}{27} \approx 2,07.$$

2) Вычислить $\sqrt[4]{17}$ с точностью 0,01.

$$\sqrt[4]{17} = \sqrt[4]{16+1} = 2 \sqrt[4]{1 + \frac{1}{16}} = 2 \left(1 + \frac{1}{16} \right)^{\frac{1}{4}}.$$

Воспользуемся биномиальным рядом, полагая $x = \frac{1}{16}$, $m = \frac{1}{4}$.

$$2 \left(1 + \frac{1}{16} \right)^{\frac{1}{4}} = 2 \left[1 + \frac{1}{4 \cdot 16} + \frac{(-1) \cdot 3}{2! 4^2} \left(\frac{1}{16} \right)^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 7}{4 \cdot 4 \cdot 4} \cdot \frac{1}{3!} \left(\frac{1}{16} \right)^3 + \dots \right] =$$

$$= 2 + \frac{1}{32} - \frac{3}{16^3} + \frac{7}{4 \cdot 16^4} - \dots, \quad |R_n| < |u_{n+1}|, \quad |u_3| = \frac{3}{16^3} < 0,01 \quad |R_2| < |u_3|.$$

$$\sqrt[4]{17} = 2 + \frac{1}{32} = 2 + 0,031 = 2,03.$$

3) Вычислить число e с точностью 0,001.

Оценим погрешность приближенного равенства:

$$e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}, \quad 0 < x < \infty.$$

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} + \dots = \frac{x^n}{n!} \left(\frac{x}{n+1} + \frac{x^2}{(n+1)(n+2)} + \dots \right) <$$

$$< \frac{x^n}{n!} \left[\frac{x}{n+1} + \left(\frac{x}{n+1} \right)^2 + \left(\frac{x}{n+1} \right)^3 + \dots \right] =$$

по формуле для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии при $0 < x < 1$

$$= \frac{x^n}{n!} \cdot \frac{\frac{x}{n+1}}{1 - \frac{x}{n+1}} = \frac{x^n}{n!} \cdot \frac{x}{n+1-x} \Rightarrow R_n(x) < \frac{x^n}{n!} \cdot \frac{x}{n+1-x}.$$

Для вычисления числа e оценим $R_n(x)$ при $x=1$: $\frac{1}{n!n} < 0,001$, $n=5$.

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3 \cdot 2} + \frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 2} + \frac{1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 2 + 0,5 + 0,166 + 0,041 + 0,008 = 2,715.$$

13.6.2. Вычисление интегралов, не берущихся в элементарных функциях

Рассмотрим определенный интеграл с конечными пределами вида

$$\int_a^b f(x) dx.$$

1). Для $f(x) = e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots$, получим так называемый интеграл Лапласа:

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \int_0^x e^{-t^2} dt = \int_0^x \left(1 - t^2 + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \dots \right) dt = \\ &= \left(\frac{t}{1} - \frac{t^3}{1! \cdot 3} + \frac{t^5}{2! \cdot 5} - \frac{t^7}{3! \cdot 7} + \dots \right) \Bigg|_0^x = x - \frac{x^3}{1! \cdot 3} + \frac{x^5}{2! \cdot 5} - \frac{x^7}{3! \cdot 7} + \dots \end{aligned}$$

Определим, сколько членов ряда нужно учесть, чтобы получить результат с точностью 0,001. $x = 1$.

$$\int_0^1 e^{-t^2} dt = 1 - \frac{1}{1! \cdot 3} + \frac{1}{2! \cdot 5} - \frac{1}{3! \cdot 7} + \dots$$

Ряд сходится по признаку Лейбница при этом $S < u_1$. отбросим члены для которых $\frac{1}{n!(2n+1)} \leq 0,001 \quad n = 0, 1, 2, \dots \Rightarrow n = 5$.

2). Для $f(x) = \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$, можно вычислить так называемый интегральный синус:

$$Si x = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^x \frac{1}{t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int_0^x t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)! (2n+1)} x^{2n+1}.$$

13.6.3. Решение дифференциальных уравнений

I. Метод последовательного дифференцирования

$$y' = x^2 y^2 - 1, \quad y(0) = 1.$$

Ищем решение в виде: $y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!} x + \frac{y''(0)}{2!} x^2 + \dots$

По условию $y(0)=1$, поставляя $x=0$ в дифференциальное уравнение $y' = x^2 y^2 - 1$, получаем $y'(0) = -1$.

Последовательным дифференцированием исходного дифференциального уравнения находим:

$$y'' = 2xy^2 + 2x^2 y y', \quad \Rightarrow y''(0) = 0;$$

$$y''' = 2y^2 + 4xy y' + 2x^2 (y')^2 + 2x^2 y y'', \quad \Rightarrow y'''(0) = 2 \text{ и т.д.}$$

$$\text{В итоге } y(x) = 1 - x + \frac{1}{3}x^3 - \dots$$

II. Метод неопределенных коэффициентов

$$y'' = 2xy' + 4y, \quad y = 0, \quad y' = 1 \text{ при } x = 0. \quad *)$$

Ищем решение в виде:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \quad a_n = ? \quad a_0 = 0, \quad a_1 = 1 \text{ из } *)$$

$$y = x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

$$y' = 1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots$$

$$y'' = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3 x + \dots$$

Подстановка в уравнение дает:

$$2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + \dots = 2x + 4a_2 x^2 + 6a_3 x^3 + \dots$$

$$\dots + 4x + 4a_2 x^2 + 4a_3 x^3 + \dots$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x :

$$x^0 : 2a_2 = 0 \rightarrow a_2 = 0;$$

$$x^1 : 6a_3 = 2 + 4 \rightarrow a_3 = 1;$$

$$x^2 : 12a_4 = 4a_2 + 4a_2 \rightarrow a_4 = 0;$$

.....

$$a_n = \frac{2a_{n-2}}{n-1}$$

.....

$$a_5 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad a_6 = 0, \dots \Rightarrow y = x + x^3 + \frac{1}{2}x^5 + \dots$$

14.1 Ряды в комплексной области. Числовые ряды

Пусть $z_n = a_n + ib_n$, $n \in \mathbb{N}$ - последовательность комплексных чисел.

О Выражение $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots$ (1) называется **числовым рядом в комплексной плоскости**.

Т Ряд (1) **сходится**, если существует конечный предел

$$\begin{aligned} S &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n z_k = \lim_{n \rightarrow \infty} [(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) + \dots + (a_n + ib_n)] = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n a_k + i \sum_{k=1}^n b_k \right) = A + iB, \end{aligned}$$

где A и B - пределы соответствующих частичных сумм рядов, составленных из действительных и мнимых частей чисел z_n .

Необходимым и достаточным условием сходимости ряда (1) является одновременная сходимость числовых рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ с действительными членами.

Т Если сходится положительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$, составленный из модулей членов ряда (1), то ряд (1) так же сходится.
Напомним, что

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi, \quad |e^{i\varphi}| = \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = 1.$$

$$|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Пример:

Исследуйте на сходимость ряды:

1). $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i\pi n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\cos \pi n + i \sin \pi n)}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ сходится условно.

2). $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i\frac{\pi}{n}}}{n^2}$ сходится абсолютно, поскольку

а) $|z_n| = \left| \frac{1}{n^2} \right|$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится абсолютно;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i\frac{\pi}{n}}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi}{n}}{n^2} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n^2}$, ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi}{n}}{n^2}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n^2}$ сходятся

абсолютно по теореме сравнения со сходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$,

$$\text{так как } \left| \frac{\cos \frac{\pi}{n}}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}; \quad \left| \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}.$$

$$3). \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2i}{(1+i)n+3} \right)^n$$

$$\begin{aligned} |z_n| &= \left| \left(\frac{n+2i}{(1+i)n+3} \right)^n \right| = \frac{|(n+2i)|^n}{|((1+i)n+3)|^n} = \frac{(n^2+4)^{n/2}}{\left((n+3)^2 + n^2 \right)^{n/2}} = \\ &= \left(\frac{n^2+4}{2n^2+6n+9} \right)^{n/2}. \end{aligned}$$

Сравним полученный ряд со сходящимся рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^{n/2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{2})^n},$$

который представляет собой бесконечно убывающую геометрическую прогрессию:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{n^2+4}{2n^2+6n+9} \right)^{n/2}}{\left(\frac{1}{2} \right)^{n/2}} = 1,$$

исследуемый ряд сходится абсолютно.

4). $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^3}{2^n} + i \frac{2n+5}{3n^2-2n} \right)$ расходится, т.к. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$ сходится по при-

знаку Даламбера $\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 2^n}{2^{n+1} n^3} = \frac{1}{2} < 1 \right)$,

а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{3n^2-2n}$ расходится по признаку сравнения с гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$: $\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+5)n}{3n^2-2n} = \frac{2}{3} \right)$

5). $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2+i)^n \cdot n}{2^n}$ расходится, так как

$$|z_n| = \left| \frac{(2+i)^n \cdot n}{2^n} \right| = \left| \frac{(\sqrt{5})^n \cdot n}{2^n} \right| = \left(\frac{\sqrt{5}}{2} \right)^n \cdot n \rightarrow \infty.$$

6). $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n \cdot n}{2^n}$ сходится абсолютно, так как $|z_n| = \left| \frac{\sqrt{2}^n \cdot n}{\sqrt{2}^{2n}} \right| = \left| \frac{n}{\sqrt{2}^n} \right|$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{2}^n}$ сходится по признаку Даламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)\sqrt{2}^n}{\sqrt{2}^{n+1} \cdot n} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1.$$

7). $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-i)\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+i}{(n^2+1)\sqrt{n}}$ сходится абсолютно,

$$\text{так как } |z_n| = \sqrt{\frac{n^2}{(n^2+1)^2 \cdot n} + \frac{1}{(n^2+1)^2 n}} = \sqrt{\frac{n^2+1}{(n^2+1)^2 n}} = \left(\frac{1}{(n^2+1)n} \right)^{1/2}.$$

Сравнивая этот ряд со сходящимся рядом

$$\left(\frac{1}{n^3} \right)^{1/2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3}{(n^2+1)n} \right)^{1/2} = 1,$$

убеждаемся, что исследуемый ряд сходится абсолютно.

14.2. Степенные ряды в комплексной области

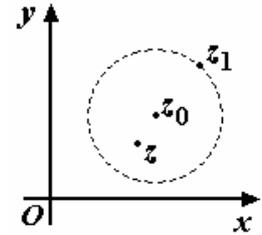
О Степенным рядом в комплексной области называется ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \dots, \quad (1)$$

где $a_i (i \in \mathbb{N})$ и z_0 - фиксированные комплексные числа, $z = x + iy$ - независимая комплексная переменная.

При $z_0 = 0$ ряд принимает вид $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$ (2)

О Пусть z_1 - некоторое комплексное число. Ряд (1) сходится в точке z_1 , если при подстановке в него вместо z числа z_1 , получается сходящийся ряд с комплексными членами. В противном случае ряд (1) расходится.



Г **Теорема Абеля.** Если степенной ряд (1) сходится в точке z_1 , то он сходится, и притом абсолютно, в любой точке z , которая лежит внутри окружности с центром z_0 , проходящей через z_1 , т.е. для всех z таких, что $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$.

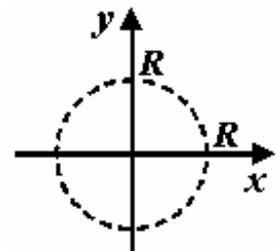
О Множество точек z , в которых ряд сходится, называется **областью сходимости** ряда.

Для степенных рядов (1) возможны случаи:

- 1) ряд сходится только при $z = z_0$ ($R = 0$);
- 2) ряд сходится при всех z ($R = \infty$);
- 3) существует такое число $R > 0$, что ряд сходится при любом значении z , для которого $|z - z_0| < R$ и расходится при любом z , для которого $|z - z_0| > R$. Число R называется **радиусом сходимости** степенного ряда (1), а круг $|z - z_0| < R$ называется **кругом сходимости** ряда.

На границе области сходимости $|z - z_0| = R$ ряд может как сходиться, так и расходиться.

Для ряда (2) областью сходимости ряда является круг $|z| < R$ радиуса R с центром в начале координат.



Радиус сходимости: по признаку Даламбера:

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|,$$

по признаку Коши:

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Пример:

Найдите области сходимости рядов

1) $\sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n = 1 + (z - z_0) + (z - z_0)^2 + \dots$ $R=1$ Ряд сходится внутри круга $|z - z_0| < 1$ и расходится вне этого круга. В точках окружности $|z - z_0| = 1$ ряд расходится, т.к. его общий член не стремится к нулю.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots$ $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{n} \right| = 1$. Ряд сходится внутри круга $|z| < 1$ и расходится вне этого круга. На граничной окружности $|z| = 1$ в некоторых точках ($z = -1$) сходится, а в некоторых ($z = 1$) расходится.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$ $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n-1)!} = \infty$ Ряд сходится, притом абсолютно, при любом z .

$\sum_{n=1}^{\infty} n! z^n = 1!z + 2!z^2 + 3!z^3 + \dots$ $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$

Ряд сходится только в точке $z_0 = 0$.

В результате изучения материала, изложенного в этих лекциях, студент должен знать:

- определение функционального ряда, точки сходимости ряда, области сходимости ряда;
- понятие равномерной сходимости, признак Вейерштрасса;
- степенные ряды, их область сходимости, вычисление радиуса сходимости;
- разложение функций в степенные ряды Тейлора и Маклорена;
- ряды Тейлора и Маклорена основных элементарных функций;
- применение степенных рядов (вычисление значений функций, вычисление интегралов, не берущихся в элементарных функциях, решение дифференциальных уравнений).

Лекции 15 - 16

РЯДЫ ФУРЬЕ

При описании периодически повторяющихся явлений более естественными являются разложения изучаемых функций не в степенные ряды, а в ряды по функциям, также обладающим свойством периодичности. В лекциях 15 – 16 рассмотрены тригонометрические ряды Фурье, широко используемые при исследовании периодических функций.

- 15.1. Гармонический анализ. Ряды Фурье
- 15.2. Ортогональные системы функций
- 15.3. Тригонометрические ряды
- 15.4. Коэффициенты Фурье и ряд Фурье
для периодической функции с периодом 2π
- 15.5. Разложение функций в тригонометрические ряды
- 16.1. Разложение в ряд четных и нечетных функций с периодом 2π
- 16.2. Ряд Фурье для функции с произвольным периодом $T=2L$
- 16.3. Разложение в ряд Фурье непериодических функций
- 16.4. Комплексная форма ряда Фурье
- 16.5. Интеграл Фурье

15.1. Гармонический анализ. Ряды Фурье

О **Гармоническим колебанием** называется периодическое изменение во времени физической величины, происходящее по закону косинуса или синуса.

О **Основной гармоникой** называется простейшая периодическая функция вида $y = f(x) = a \sin(\omega x + \varphi_0) = a \cos(\omega x - \varphi_0)$, где a – амплитуда, ω – круговая частота, φ_0 – начальная фаза колебания.

Если независимая переменная – время t , то величина $y=f(t)$ совершает **гармоническое колебание** с периодом $T = \frac{2\pi}{\omega}$ и частотой

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}.$$

Функции $a_2(\sin 2\omega x + \varphi_0)$, $a_3 \sin(3\omega x + \varphi_0)$, ... называются второй, третьей, ... **высшими гармониками** относительно основной.

Основная гармоника может быть представлена в виде суммы двух тригонометрических функций одного и того же аргумента:

$$a \sin(\omega x + \varphi_0) = a \sin \omega x \cos \varphi_0 + a \cos \omega x \sin \varphi_0 = A \sin \omega x + B \cos \omega x .$$

Функции $\sin x$ и $\cos x$ являются периодическими с периодом $T = 2\pi$.

Функции $\sin 2x$ и $\cos 2x$, $\sin 3x$ и $\cos 3x, \dots$ так же имеют период 2π .

Любая линейная комбинация вида

$$a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots \quad (1)$$

так же является периодической с периодом $T = 2\pi$.

Гармонический анализ используется для изучения периодических процессов. Любая величина $f(t)$, связанная с периодическим процессом, по истечении периода T возвращается к своему первоначальному значению, т.е. является периодической функцией с периодом T .

Сущность **гармонического анализа** заключается в представлении функций, описывающих периодические процессы, в виде конечной или бесконечной суммы гармонических колебаний вида (1); гармонический анализ состоит в разложении периодических функций в сходящийся ряд Фурье.

15.2. Ортогональные системы функций

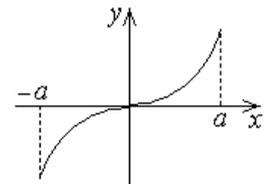
Предварительно докажем следующие утверждения, которые следует знать для дальнейшего изложения.

1). Интеграл от нечетной функции в симметричных пределах равен нулю. Если $f(x) = -f(-x)$, то

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx =$$

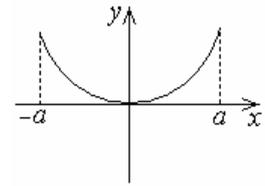
замена x на $(-x)$ в первом интеграле дает

$$= \int_a^0 f(-x) dx + \int_0^a f(x) dx = -\int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = 0 .$$



2). $f(x)=f(-x)$ – четная функция.

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx =$$



Заменяя x на $(-x)$ в первом интеграле, получим

$$= -\int_a^0 f(-x) dx + \int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

! Если функция $f(x)$ имеет период 2π , то интеграл от нее по любому отрезку длины 2π имеет одно и то же значение, т.е.

$$\int_a^{a+2\pi} f(x) dx = \int_0^{2\pi} f(x) dx. \quad (*)$$

$$\text{Имеем } \int_a^{a+2\pi} f(x) dx = \int_a^0 f(x) dx + \int_0^{2\pi} f(x) dx + \int_{2\pi}^{2\pi+a} f(x) dx \quad (**)$$

Заменим в последнем интеграле правой части $x = 2\pi + t$, тогда

$$\int_{2\pi}^{2\pi+a} f(x) dx = \int_0^a f(2\pi + t) dt = \int_0^a f(t) dt \text{ в силу периодичности } f(x).$$

Отсюда следует, что сумма первого и третьего интегралов в правой части (***) равна нулю.

Пусть функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ заданы на отрезке $x \in [a, b]$, а произведение этих функций $f_1(x) f_2(x)$ интегрируемо на этом отрезке.

О Функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ называются **ортогональными** на отрезке $[a, b]$, если $\int_a^b f_1(x) f_2(x) dx = 0$.

Рассмотрим систему периодических тригонометрических функций с периодом 2π : $\{\cos 0 = 1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots\}$. Покажем, что эти функции ортогональны на отрезке $[-\pi, \pi]$, а значит, в силу утверждения (*) и на любом отрезке $[a, a + 2\pi]$.

Для доказательства нужно вычислить и убедиться, что интегралы

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = 0 \text{ при } m \neq n, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = 0 \text{ при } m \neq n.$$

Действительно,

$$1) \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, dx = -\frac{\cos nx}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 \quad \text{в силу нечетности подынтегральной функции};$$

$$2) \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx = \frac{\sin nx}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{n} (\sin \pi n - \sin(-\pi n)) = 0, \quad \text{так как } \sin \pi n = 0.$$

$$3) \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos nx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2nx \, dx = 0 \quad \text{в силу нечетности подынтегральной функции.}$$

С использованием формул:

$$\cos nx \cos mx = \frac{1}{2} [\cos(n+m)x + \cos(n-m)x];$$

$$\sin nx \sin mx = \frac{1}{2} [\cos(n-m)x - \cos(n+m)x];$$

$$\sin nx \cos mx = \frac{1}{2} [\sin(n-m)x + \sin(n+m)x].$$

Вычислим следующие интегралы:

$$4) \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(n-m)x - \cos(n+m)x) \, dx = \\ = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(n-m)x}{n-m} - \frac{\sin(n+m)x}{n+m} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, \quad \text{так как } \sin(n \pm m)\pi = 0.$$

$$5) \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(n-m)x + \cos(n+m)x) \, dx = \\ = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(n-m)x}{n-m} + \frac{\sin(n+m)x}{n+m} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

$$6) \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin(n-m)x + \sin(n+m)x) \, dx = 0$$

в силу нечетности подынтегральной функции системы.

Итак, ортогональность тригонометрических функций доказана.

Вычислим значения интегралов при $m=n$:

$$7) \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 2nx) \, dx = \frac{1}{2} \left(x - \frac{\sin 2nx}{2n} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2} (\pi + \pi) = \pi;$$

$$8) \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2nx) \, dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{\sin 2nx}{2n} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2} (\pi + \pi) = \pi.$$

15.3. Тригонометрические ряды

О Функциональный ряд вида:

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

называется **тригонометрическим рядом**, а постоянные числа a_n, b_n ($n=1, 2, 3, \dots$) называются **коэффициентами** ряда.

15.4. Коэффициенты Фурье и ряд Фурье для периодической функции с периодом 2π

Т Если $f(x)$ непрерывная периодическая функция с периодом 2π , интегрируемая на интервале $(-\pi, \pi)$, такая, что для всех x справедливо разложение

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (1)$$

и ряд сходится к $f(x)$ равномерно, то для коэффициентов ряда справедливы формулы Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

Доказательство:

Так как ряд (1) сходится к $f(x)$ равномерно, то его можно интегрировать почленно:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx dx + \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin nx dx \right) \quad (2)$$

В п. 15.2. показано, что $\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx dx = 0$, $\int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin nx dx = 0$.

$$\text{Значит, из (2) } \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \pi a_0, \text{ откуда } a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx. \quad (3)$$

Умножим ряд (1) почленно на $\cos kx$ и проинтегрируем:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos kx dx \right).$$

Так как все интегралы кроме того, для которого $n = k$, равны нулю, (см. п. 15.2.), получаем:

$$a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx = a_n \cdot \pi, \quad \text{откуда} \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx. \quad (4)$$

Умножение (1) на $\sin kx$ и интегрирование в пределах от $-\pi$ до π дает

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx. \quad (5)$$

Заметим, что ряды, полученные умножением равномерно сходящегося исходного ряда (1) на ограниченные функции $\sin kx$ и $\cos kx$, сходятся равномерно и их также можно почленно интегрировать.

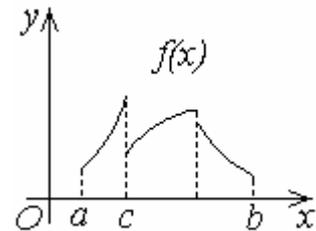
- О** Если функция $f(x)$ определена на отрезке $[-\pi, \pi]$, то числа a_n, b_n , определенные формулами (3), (4) и (5), называются **коэффициентами Фурье** функции $f(x)$, а тригонометрический ряд (1), коэффициентами которого служат эти числа, – **рядом Фурье** функции $f(x)$.
- Т** Если функция $f(x)$ разлагается в равномерно сходящийся тригонометрический ряд, то этот ряд является ее **рядом Фурье**.

15.5. Разложение функций в тригонометрические ряды

Вопрос о возможности разложения функции $f(x)$ в тригонометрический ряд сводится к ответу на вопрос о том, какими свойствами должна обладать функция $f(x)$, чтобы построенный для нее ряд Фурье сходиллся и его сумма совпала с $f(x)$.

В отличие от степенных рядов, в которые разлагаются только функции, имеющие производные всех порядков, в тригонометрические ряды разлагаются почти любые функции.

- О** Функция $f(x)$ называется **кусочно-монотонной на отрезке $[a, b]$** , если этот отрезок с помощью конечного числа точек x_1, x_2, \dots, x_{n-1} можно разбить на отрезки, внутри каждого из которых функция $f(x)$ непрерывна и монотонна.



Кусочно-монотонная функция $f(x)$ может иметь на $[a, b]$ только конечное число точек разрыва I рода.

Если в точке $x=c$ имеет место разрыв, то в силу монотонности функции $f(x)$ слева от точки c существует предел $\lim_{x \rightarrow c-0} f(x) = f(c-0)$, а в силу монотонности справа существует $\lim_{x \rightarrow c+0} f(x) = f(c+0)$.

Достаточные условия разложимости функции в ряд Фурье дает следующая теорема, которую мы приведем без доказательства.

Т **Теорема Дирихле.** Если функция $f(x)$ с периодом 2π **ограничена и кусочно-монотонна на отрезке $[-\pi, \pi]$** , то ряд Фурье, построенный для $f(x)$, сходится во всех точках этого отрезка.

При этом:

1) сумма $S(x)$ этого ряда равна $f(x)$ в точках непрерывности функции $f(x)$;

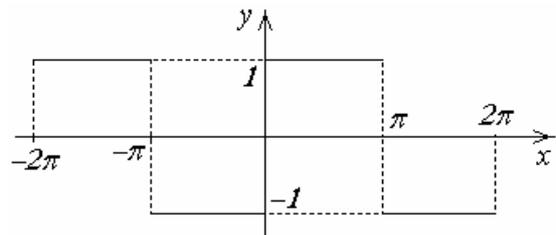
2) если точка $x=c$ является точкой разрыва $f(x)$, то сумма ряда Фурье

$$S(x) = \frac{f(c+0) + f(c-0)}{2}.$$

Пример:

Разложите в ряд Фурье периодическую функцию с периодом 2π на $[0, 2\pi)$,

$$\text{если } f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, \pi] \\ -1, & x \in (\pi, 2\pi] \end{cases}.$$



Решение:

Вычислим коэффициенты Фурье.

Учитывая доказанное в п.15.2 утверждение о том, что

$$\int_a^{a+2\pi} f(x) dx = \int_0^{2\pi} f(x) dx \text{ для периодической функции } f(x) \text{ с периодом } 2\pi,$$

интегралы по $[0, 2\pi]$ можно заменить соответствующими интегралами по $[-\pi, \pi]$:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0, \text{ так как подынтегральная функция является нечетной;}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = 0 \text{ из нечетности подынтегральной функции } f(x) \cdot \cos nx;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 (-1) \sin nx dx + \int_0^{\pi} \sin nx dx \right] =$$

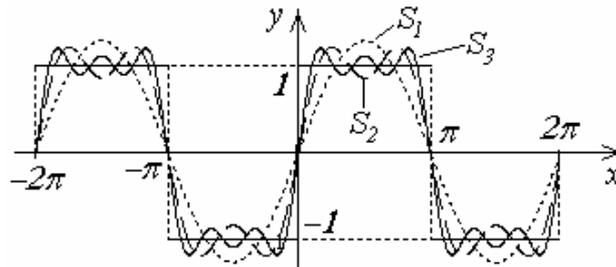
$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos nx}{n} \Big|_{-\pi}^0 - \cos \frac{nx}{n} \Big|_0^{\pi} \right] =$$

$$= \frac{2}{\pi n} (\cos 0 - \cos n\pi) = \begin{cases} 0, & \text{если } n = 2k - \text{четное;} \\ \frac{4}{\pi n}, & \text{если } n = 2k + 1 - \text{нечетное.} \end{cases}$$

Итак, разложение $f(x)$ в ряд Фурье имеет вид:

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left[\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right] = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}.$$

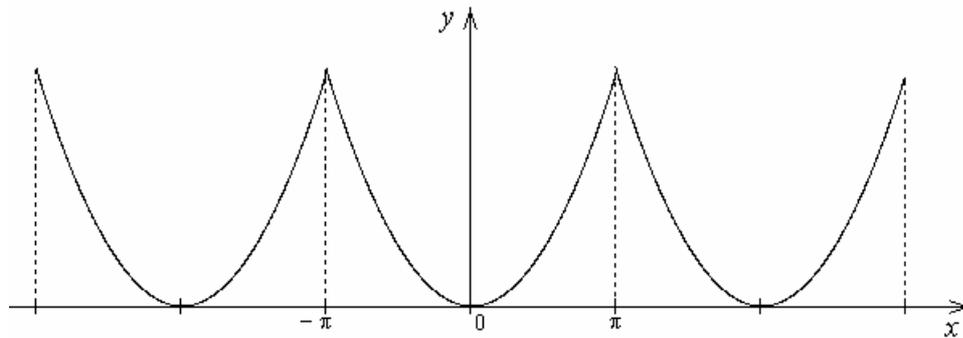
Построим графики трех первых частичных сумм ряда.



Видим, что с увеличением числа слагаемых частичная сумма все точнее представляет $f(x)$. Найдём значение суммы полученного ряда; в частности, при $x = \frac{\pi}{2}$ получаем $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$

Пример:

Разложите в ряд Фурье периодическую функцию с периодом 2π , если на отрезке $[-\pi, \pi]$ она задана формулой $f(x) = x^2$.



Вычислим коэффициенты Фурье:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin nx \, dx = 0 \text{ в силу нечетности подынтегральной функции;}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \, dx = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx \, dx =$$

(интегрируем по частям)

$$\left| \begin{array}{l} u = x^2, \, dv = \cos nx \, dx \\ du = 2x \, dx, \, v = \frac{\sin nx}{n} \end{array} \right| = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^2 \sin nx}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{n} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx \, dx \right] =$$

(еще раз интегрируем по частям)

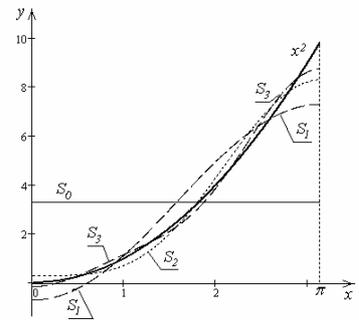
$$= \left[\begin{array}{l} u = x, \quad dv = \sin nx dx \\ du = dx, \quad v = -\frac{\cos nx}{n} \end{array} \right] = -\frac{2}{n\pi} \left[-\frac{x \cos nx}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx \right] =$$

$$= \frac{4}{n^2} \cos n\pi = \begin{cases} \frac{4}{n^2}, & \text{если } n = 2k - \text{четное;} \\ -\frac{4}{n^2}, & \text{если } n = 2k + 1 - \text{нечетное.} \end{cases}$$

Разложение в ряд Фурье имеет вид:

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} - 4 \left[\frac{\cos x}{1} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \dots \right] = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cos kx}{k^2}.$$

На рисунке приведены графики исходной функции и первых четырех частичных сумм ряда Фурье на отрезке $[0, \pi]$. В примере1 получился ряд, содержащий только синусы, а в примере2 – только косинусы кратных дуг. Это обусловлено тем, что в ряд Фурье разлагаются, соответственно, нечетная и четная функции.



16.1. Разложение в ряд четных и нечетных функций с периодом 2π

Пусть $f(x)$ – периодическая функция с периодом 2π .

1). Если функция $f(x)$ нечетная, $f(-x) = -f(x)$, все коэффициенты ее ряда Фурье при косинусах кратных дуг равны нулю $a_0 = a_n = 0$, так как при этом функция $f(x) \cdot \cos nx$ – также нечетная.

Функция $f(x) \cdot \sin nx$ при этом четная, поэтому $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx$, и

ряд Фурье **нечетной** периодической функции содержит только **синусы**

кратных дуг: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin nx$.

2). Если функция $f(x)$ четная, $f(-x) = f(x)$, все коэффициенты b_n равны нулю, $b_n=0$, так как при этом функция $f(x) \cdot \sin nx$ – нечетная.

Функция $f(x) \cdot \cos nx$ при этом четная, $a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx$,

$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nxdx$, и ряд Фурье **четной** периодической функции со-

держит только **косинусы** кратных дуг: $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$.

16.2. Ряд Фурье для функции с произвольным периодом $T=2l$

По условию $f(x+2l) = f(x)$.

Сделаем замену переменной, $x = \frac{l}{\pi}t$, $t = \frac{\pi}{l}x$.

Тогда
$$f(x) = f\left(\frac{l}{\pi}t\right) = f\left(\frac{l}{\pi}t + 2l\right) = f\left(\frac{l}{\pi}t + 2 \cdot \frac{\pi}{l}x\right) =$$

$$= f\left(\frac{l}{\pi}t + \frac{2\pi}{t} \cdot \frac{l}{\pi}t\right) = f\left(\frac{l}{\pi}(t + 2\pi)\right).$$

Функция $f(x) = f\left(\frac{l}{\pi}t\right)$ по аргументу t имеет период 2π .

Разложим периодическую функцию с периодом 2π $f\left(\frac{l}{\pi}t\right)$ в ряд Фурье на отрезке $[-\pi, \pi]$. $f\left(\frac{l}{\pi}t\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$, где коэффициенты находятся по формулам:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}t\right) dt;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}t\right) \cos ntdt;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}t\right) \sin ntdt.$$

Возвращаясь к старой переменной $t = x \frac{\pi}{l}$; $dt = \frac{\pi}{l} dx$, получаем ряд Фурье для функции с периодом $2L$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x \right),$$

где $a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx$; $a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos n \frac{\pi}{l} x dx$; $b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx$;

Пример:

Разложите в ряд Фурье функцию $f(x) = |x|$ на отрезке $[-l, l]$.

Так как функция четная, $b_n = 0$, $a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l x dx = l$,

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l x \cos \frac{n\pi}{l} x dx = \frac{2}{l} \left[\frac{l}{n\pi} x \sin \frac{n\pi}{l} x \right]_0^l - \frac{l}{n\pi} \int_0^l \sin \frac{n\pi}{l} x dx = \frac{2}{l} \cdot \frac{l^2}{(n\pi)^2} \cos \frac{n\pi}{l} x \Big|_0^l =$$

$$= \frac{2l}{n^2 \pi^2} (\cos n\pi - \cos 0) = \begin{cases} 0, & \text{если } n - \text{четное, } n = 2k; \\ -\frac{4l}{(2k+1)^2 \pi^2}, & \text{если } n \text{ нечетное, } n = 2k+1. \end{cases}$$

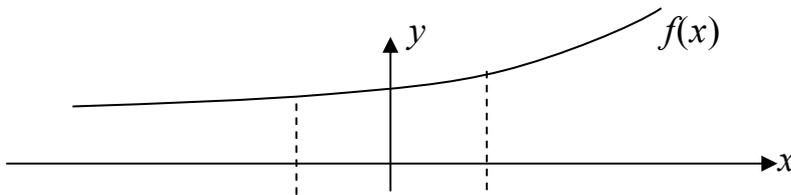
Итак,

$$|x| = \frac{2}{l} - \frac{4l}{\pi^2} \left(\cos \frac{\pi}{l} x + \frac{1}{3^2} \cos 3 \frac{\pi}{l} x + \frac{1}{5^2} \cos 5 \frac{\pi}{l} x + \dots \right), \quad x \in [-l; l].$$

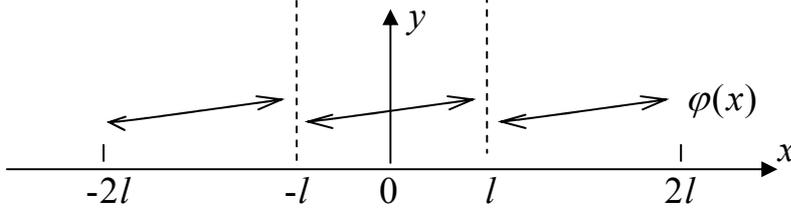
16.3. Разложение в ряд Фурье непериодических функций

Сумма ряда Фурье есть периодическая функция, поэтому непериодическую кусочно-монотонную, заданную на интервале $(-\infty, \infty)$ функцию нельзя представить рядом Фурье. Но можно разложить ее в ряд Фурье на любом конечном промежутке.

Для функции $f(x)$



Построим функцию $\varphi(x)$



такую, что $\varphi(x) = f(x)$ для $x \in (-l; l)$, а на всю действительную ось она продолжается периодически с периодом $2l$:

$$\varphi(x) = \varphi(x + 2l).$$

Функция $\varphi(x)$ разлагается в ряд Фурье (п. 15.5), причем в точках $x = \pm l$ выполняется:

$$S(l) = \frac{\varphi(l-0) + \varphi(l+0)}{2},$$

где $\varphi(l-0) = f(l-0)$, $\varphi(l+0) = \varphi(-l+0) = f(-l+0)$,

то есть $S(l) = \frac{f(l-0) + f(-l+0)}{2}$, $S(-l) = S(l)$.

Итак, если **произвольная** функция $f(x)$ задана на интервале $(0, l)$, ее можно представить в виде **периодической** функции $\varphi(x)$ с периодом $2l$, дополнив (продолжив) $f(x)$ **произвольным** образом некоторой кусочно-монотонной функцией $f_1(x)$ на интервал $(-l, 0)$ так, что:

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (0, l); \\ f_1(x), & x \in (-l, 0). \end{cases}$$

Так как продолжение $f_1(x)$ первоначально заданной функции $f(x)$ может быть выбрано бесчисленным множеством способов, то существует бесчисленное множество рядов Фурье, которые сходятся к $f(x)$ в интервале $(0, l)$.

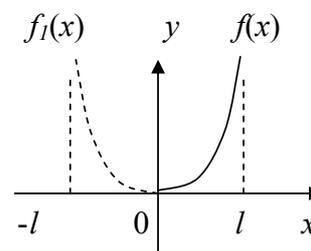
Среди различных продолжений $f(x)$ выберем **четное** и **нечетное** продолжения, в результате которых получатся разложения $f(x)$ либо по косинусам, либо по синусам кратных дуг соответственно.

1. Если $f_1(x) = f(-x)$, $x \in (-l, 0)$,

$$\text{то } f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l},$$

$$\text{где } a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad x \in (0, l),$$

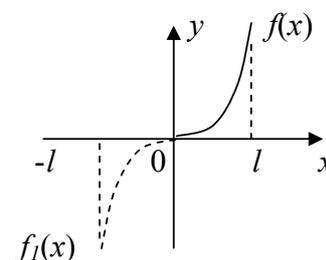
$$n = 1, 2, \dots$$



Если $f_1(x) = -f(-x)$, $x \in (-l, 0)$,

$$\text{то } f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l},$$

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad x \in (0, l)$$



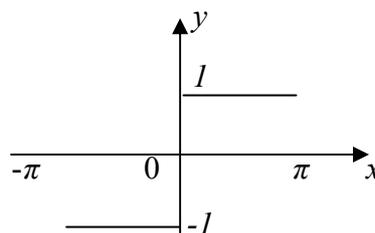
Пример:

Разложите $f(x)=1$, заданную на интервале $(0, \pi)$, по синусам и косинусам кратных дуг.

Решение:

1). $x \in (0, \pi)$, $l = \pi$.

Продолжим $f(x)$ на интервал $(-\pi, 0)$ нечетным образом:



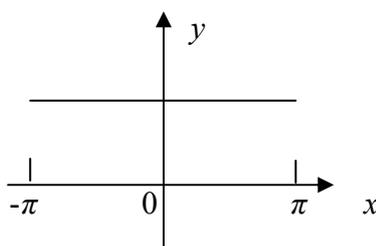
тогда $a_n = 0$,

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \cdot \sin nx \, dx = -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{\cos nx}{n} \Big|_0^{\pi} = -\frac{2}{\pi n} (\cos \pi n - 1) =$$

$$= -\frac{2}{\pi n} \left((-1)^n - 1 \right) = \begin{cases} 0, & \text{если } n = 2k \text{ четное,} \\ \frac{4}{\pi(2k-1)}, & \text{если } n = 2k+1 \text{ нечетное.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Итак, } 1 &= \frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right) = \\ &= \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \sin(2k-1)x : \end{aligned}$$

2). Продолжим $f(x)$ на интервал $(-\pi, 0)$ четным образом,



тогда $b_n = 0$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \cdot dx = 2,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \cdot \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\sin nx}{n} \Big|_0^{\pi} = 0$$

$$\text{и } 1 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 0 \cdot \cos nx = 1.$$

16.4. Комплексная форма ряда Фурье

Ряд Фурье для функции $f(x)$ с периодом $2l$ имеет вид:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x \right),$$

где

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx; \quad a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos n \frac{\pi}{l} x dx; \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx.$$

Преобразуем его к комплексной форме с помощью формул Эйлера:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi, \quad \cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

Обозначим $\frac{\pi}{l} = \omega$.

Тогда

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{e^{in\omega x} + e^{-in\omega x}}{2} + b_n \frac{e^{in\omega x} - e^{-in\omega x}}{2i} \right) = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n - ib_n}{2} e^{in\omega x} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-in\omega x} \right), \end{aligned}$$

или $f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{in\omega x} + c_{-n} e^{-in\omega x})$, где введены обозначения:

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} = \overline{c_n}, n \in \mathbb{N}.$$

Получим выражения для комплексных коэффициентов c_n и c_{-n} :

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos n\omega x dx - i \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin n\omega x dx \right) = \\ &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) [\cos(-n\omega x) + i \sin(-n\omega x)] dx = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-in\omega x} dx. \end{aligned}$$

Аналогично для c_{-n} имеем $c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{in\omega x} dx$, где $n = 1, 2, \dots$

При $n = 0$ имеем $c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) dx$.

Если считать номер n не натуральным, а целым числом, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, все формулы для вычисления коэффициентов ряда можно записать единообразно:

$c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-\frac{i n \pi x}{l}} dx$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, а сам ряд Фурье в виде

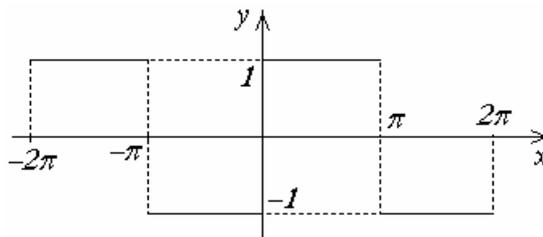
$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{i n \pi x}{l}}.$$

Эта сумма называется **рядом Фурье в комплексной форме**, слагающие ее функции $c_n e^{\frac{i n \pi x}{l}}$ - **комплексными гармониками**, коэффициенты c_n - **комплексными амплитудами гармоник**.

Пример:

Разложить в комплексный ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$ с периодом 2π , если на $[-\pi; \pi]$.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, \pi]; \\ -1, & x \in (-\pi, 0). \end{cases}$$



Решение:

Вычислим комплексные коэффициенты Фурье:

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0; \\ c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^0 f(x) e^{-inx} dx + \int_0^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(- \int_{-\pi}^0 e^{-inx} dx + \int_0^{\pi} e^{-inx} dx \right) = \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{\pi} + \int_0^{-\pi} \right) e^{-inx} dx = \frac{e^{-in\pi} + e^{in\pi} - 2}{-2\pi ni} = \\ &= \frac{1 - \cos \pi n}{\pi ni} = \begin{cases} 0, & n = 2m, \\ \frac{2}{i\pi(2m+1)}, & n = 2m+1, \end{cases} \quad m \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Выпишем разложение $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2}{i\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(2m+1)x}}{(2m+1)} = \\ &= \frac{2}{i\pi} \left(e^{ix} - e^{-ix} + \frac{e^{3ix} - e^{-3ix}}{3} + \frac{e^{5ix} - e^{-5ix}}{5} + \dots \right) = \\ &= \frac{4}{\pi} \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} + \frac{e^{3ix} - e^{-3ix}}{3 \cdot 2i} + \frac{e^{5ix} - e^{-5ix}}{5 \cdot 2i} + \dots \right) = \\ &= \frac{4}{\pi} \left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}. \end{aligned}$$

Как видно, по комплексной форме ряда Фурье легко восстанавливается его обычный вид (обычное разложение было получено ранее, стр.132).

16.5. Интеграл Фурье

Функцию $f(x)$, удовлетворяющую на отрезке $[-l;l]$ условиям теоремы Дирихле, можно разложить в ряд Фурье:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos k_n x + b_n \sin k_n x);$$

где
$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos k_n x dx, \quad (n = 0, 1, 2, \dots);$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin k_n x dx, \quad (n = 1, 2, \dots),$$

и введено обозначение: $k_n = \frac{\pi n}{l}$ (так называемые **волновые числа**).

Функция $f(x)$ может быть периодической с периодом $2l$ или непериодической. В последнем случае предполагается, что с отрезка $[-l;l]$ на всю числовую ось функция продолжена периодически.

Рассмотрим случай, когда непериодическая функция задана на всей числовой оси $(-\infty; \infty)$, на любом конечном отрезке $[-l;l]$ удовлетворяет условиям теоремы Дирихле и **абсолютно интегрируема** на всей числовой оси, т.е. $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = M < \infty$.

Подставим в ряд значения коэффициентов a_n и b_n :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) (\cos k_n x \cos k_n t + \sin k_n x \sin k_n t) dt = \\ &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) \cos k_n t dt + \frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-l}^l f(t) \cdot \cos k_n (x-t) dt. \end{aligned}$$

Устремим l к бесконечности. Предел первого слагаемого

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt \right| \leq \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{2l} \int_{-l}^l |f(t)| dt \leq \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{2l} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{M}{2l} = 0.$$

Преобразуем второе слагаемое (сумму):

$$\frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-l}^l f(t) \cdot \cos k_n(x-t) dt = \frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} F(k_n), \text{ где } F(k_n) = \int_{-l}^l f(t) \cdot \cos k_n(x-t) dt$$

(этот интеграл зависит и от x , но в данном случае нас интересует только зависимость от волновых чисел k_n).

Заметим, что волновые числа $k_n = \frac{\pi n}{l}$ образуют арифметическую прогрессию с разностью $\Delta k_n = \frac{\pi}{l}$, причем $\lim_{l \rightarrow \infty} \Delta k_n = 0$. Это позволяет преобразовать сумму:

$$\frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} F(k_n) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} F(k_n) \frac{\pi}{l} = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} F(k_n) \cdot \Delta k_n;$$

последнее представление позволяет рассматривать ряд как интегральную сумму:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} F(k_n) \cdot \Delta k_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} F(k) dk,$$

или

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} F(k) dk = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos k(x-t) dt.$$

Эта формула называется **формулой Фурье**, а интеграл, стоящий в правой части, – **интегралом Фурье**. Функция $F(k)$ называется **спектральной плотностью**.

Это название связано со следующими обстоятельствами: для периодической функции $f(x)$ с периодом $2l$ набор величин $D_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ показывает, в какой мере в разложении функции $f(x)$ представлены различные гармоники $\cos \frac{n\pi x}{l}$, $\sin \frac{n\pi x}{l}$ и называется **спектром функции $f(x)$** .

Для периодической функции $f(x)$ спектр - функция целочисленного аргумента, т.е. последовательность, величины отдельных членов которой показывает вклад соответствующих гармоник ($f(x)$ составляется как сумма бесконечного, но **счетного** количества гармоник). Для непериодической функции $f(x)$ в разложении ее на простейшие периодические составляющие присутствует **несчетное** количество слагаемых (ин-

теграл), величина $F(k)\Delta k$ описывает вклад гармоник с волновыми числами из интервала $(k - \frac{\Delta k}{2}; k + \frac{\Delta k}{2})$.

Интеграл Фурье можно представить в виде, подобном ряду Фурье:

$$f(x) = \int_0^{\infty} (A(k) \cos kx + B(k) \sin kx) dk,$$

где

$$A(k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos kt dt, \quad B(k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin kt dt,$$

и введенные ранее амплитуды $D(k) = \sqrt{A^2(k) + B^2(k)}$.

В результате изучения материала, изложенного в этих лекциях, студент должен знать:

- определение тригонометрического ряда и ряда Фурье данной периодической функции;
- достаточные условия разложимости функции в ряд Фурье (условия Дирихле);
- особенности разложений четных и нечетных функций;
- разложение в ряд Фурье функций произвольного периода;
- представление непериодической функции рядом Фурье.

БИБЛИОГРАФИЯ

1. Бугров, Е.С. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Е.С. Бугров, С.М. Никольский. – М.: Наука, 1984.
2. Беклемишев, Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Д.В.Беклемишев. – М.: Наука, 1984.
3. Ильин, В.А Аналитич геометрия – М: Наука, 1988.
4. Косторкин, А.И. Линейная алгебраическая геометрия / А.И. Косторкин, Ю.И. Манин. – М.: Наука, 1986.
5. Вся высшая математика / М.Л. Краснов [и др.]. – М.: Едиториал УРСС. 2003. Т.1–5
6. Ильин, В.А. Курс математического анализа / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. – М: Наука, 1998. Т.1.
7. Кудрявцев, Л.Д. Курс математического анализа / Л.Д. Кудрявцев. – М.: Высшая школа, 1988. Т. 1.
8. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления / Н.С. Пискунов. – М.: Интеграл–Пресс, 2001. Т 1–2
9. Игнатъева, А.В. Курс высшей математики / А.В. Игнатъева, Т.И. Краснощекова, В.Ф. Смирнов. – М.: Высшая школа, 1968.
10. Мантуров, О.В. Курс высшей математики / О.В. Мантуров, Н.М. Матвеев. – М.: Высшая школа, 1986.
11. Будаков, Б.М. Кратные интегралы и ряды / Б.М. Будаков, С.В. Фомин. – М.: Наука, 1967.
12. Бугров, Л.С., Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. – М.: Наука 1981.
13. Понтрягин, Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1982.
14. Эльсгольц, Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Наука, 1965.

Учебное издание

Александр Борисович Соболев
Александр Федорович Рыбалко

МАТЕМАТИКА

Часть 3

Редактор *Н.П. Кубыщенко*
Компьютерная верстка *Е.В. Денисюк*

Подписано в печать 07.02.2005	Печать цифровая	Формат 60x84 1/16
Бумага писчая	Тираж 200 экз. Заказ №	Усл. печ. л. 8,25
Уч.-изд. л. 7,89		Цена «С»

Редакционно-издательский отдел ГОУ ВПО УГТУ-УПИ
620002, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19

Отпечатано с готового оригинал-макета
в Отделении полиграфии ИВТОБ
620002, г. Екатеринбург, ул. Мира 19,
тел. (343) 375 –41–43